

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 7$ 일 때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
 $g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) \\ = f^{-1}(2)$$

$$(f^{-1})(2) = a \text{ 라 하면 } f(a) = 2$$

그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로

이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.

따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
 $4a^2 = 1$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$$

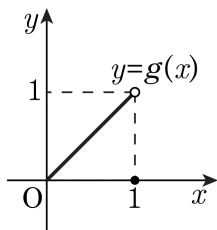
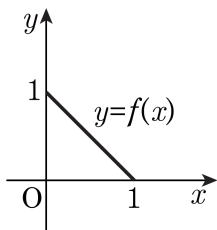
3. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 성질을 만족시킨다.

I. $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이다.

II. 임의의 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 일부가 각각 다음과 같을 때,
 $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{2}{3}$

② $-\frac{1}{3}$

③ 0

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

II. 예 의하여

$y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고,

$y = g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{7}{3}\right) &= -g\left(\frac{7}{3}\right) = -g\left(2 + \frac{1}{3}\right) \\ &= -g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

($\because -1 < x < 1$ 에서 $g(x) = x$) 이고

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = -x + 1$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right) &= f\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족

$$-a + b = -1, 3a + b = 3$$

따라서 $a = 1$, $b = 0$

2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$

$$-a + b = 3, 3a + b = -1$$

따라서 $a = -1$, $b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$$a < 0 \text{일 때 } a + b = -1 + 2 = 1$$

즉 $a + b = 1$

5. 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 3, y = 3$ 일 때

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$$

$x = 9, y = 3$ 일 때

$$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

6. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(f(x)) = 4x - 9, \quad f(f(f(x))) = 8x - 21 \quad \text{이므로}$$

$$4x - 9 = 8x - 21$$

$$\therefore x = 3$$

7. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 10개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$-2 \leq \frac{x}{2} < -1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -2$$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 0 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1$$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

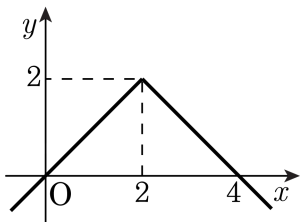
$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

8. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \dots \textcircled{\text{㉠}} \\ y = -x + 4(x > 2) & \dots \textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$\therefore x = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{㉡}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(-x + 4) \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 3$$

실근의 개수 : 2 개.