

1. 8의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

해설

8의 세제곱근은 $x^3 = 8$ 을 만족하는 x 의 값이므로

$x^3 - 8 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x - 2 = 0 \text{ 또는 } x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 + \sqrt{3}i \text{ 또는 } x = -1 - \sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은

$$2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$$

2. 식 $\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{81}$ 을 간단히 하면?

① -2

② $-\sqrt[3]{3}$

③ $\sqrt[3]{3}$

④ $2\sqrt[3]{3}$

⑤ $3\sqrt[3]{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{81} \\ &= 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\ &= \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

3. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

4. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt[4]{a^5}}$ 을 간단히 하면?

- ① a ② \sqrt{a} ③ $a \sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt[4]{a^5}} &= (a^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}\end{aligned}$$

5. $x > 0, x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x \sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2} \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

6. 양의 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

- ① $\sqrt[10]{a}$ ② $\frac{1}{\sqrt[10]{a}}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{\sqrt[15]{a}}$ ⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}} \end{aligned}$$

7. $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2^p \cdot 3^q$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① $\frac{5}{3}$

② $\frac{7}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{10}{3}$

⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \\ &= \left(3 + 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{16}{3}\sqrt[3]{3} = 2^4 \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \\ \therefore p &= 4, q = -\frac{2}{3} \quad \therefore p + q = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

8. $x > y > 0$ 일 때, $\frac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x - y)^{\frac{y}{x}}$

② $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}$

③ 1

④ $\left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$

⑤ $(x - y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

9. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

∴ 참

$$\text{㉡ } \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \quad \therefore \text{거짓}$$

$$\text{㉢ } (3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}} \quad \therefore \text{거짓}$$

10. 실수 a, b, c, d 에 대하여 $2^a = c, 2^b = d$ 일 때, 4^{a+b} 와 같은 것은?

① $\frac{1}{cd}$

② $\frac{1}{2cd}$

③ $\frac{1}{c^2d}$

④ cd

⑤ c^2d^2

해설

$$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$$

11. $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

④ $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

12. 세 수 $A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$

② $B > A > C$

③ $C > B > A$

④ $A > C > B$

⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

$$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$$

$$\therefore A > B > C$$

13. 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여
 $\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10$ 을 만족할 때, 두 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10^{\frac{2}{m}} \times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{2}{m} + \frac{1}{n}} = 10$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$2n + m = mn, (m-2)(n-1) = 2$$

m, n 은 $m \geq 2, n \geq 2$ 인 서로 다른 자연수이므로

$$m-2 \geq 0, n-1 \geq 1$$

$$\therefore m-2 = 2, n-1 = 1$$

$$\therefore m = 4, n = 2 \quad \therefore m+n = 6$$

14. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$

$$x - 2 + x^{-1} = 4$$

$$x + x^{-1} = 6$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$

$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

15. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\begin{aligned} \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

16. $2^6 = a$, $9^4 = b$ 일 때, 12^5 를 a , b 에 관한 식으로 나타내면?

① $a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{5}{8}}$

② $a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{5}{4}}$

③ $a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{8}}$

④ $a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{7}{8}}$

⑤ $a^{\frac{7}{4}} b^{\frac{3}{2}}$

해설

$$2^6 = a \text{ 에서 } 2 = a^{\frac{1}{6}}$$

$$9^4 = b \text{ 에서 } (3^2)^4 = 3^8 = b$$

$$\therefore 3 = b^{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore 12^5 = (2^2 \times 3)^5 = 2^{10} \times 3^5 = (a^{\frac{1}{6}})^{10} \times (b^{\frac{1}{8}})^5 = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{8}}$$

17. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$