

1. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$$

$$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$$

2. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$

3. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

4. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$$

$$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$$

$$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$$

$$(a+10b)(a-12b) = 0$$

$$\therefore a = -10b \text{ 또는 } a = 12b$$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로 $a > 0$, $b > 0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

5. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880

② 0.0885

③ 0.1660

④ 0.1761

⑤ 0.1777

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.5 &= \log_{10} (3 \times 5 \div 10) \\ &= \log 3 + (1 - \log 2) - 1 \\ &= 0.1761\end{aligned}$$

6. 다음 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

$$\log \frac{3}{1}, \log \frac{5}{3}, \log \frac{7}{5}, \log \frac{9}{7} \cdots$$

- ① $\log(2n-1)$

② $\log 2n$

③ $\log(2n+1)$

④ $\log(2n+2)$

⑤ $\log(2n+3)$

해설

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하고 구하는 합을 S_n 이라고 하면

$a_k = \log \frac{2k+1}{2k-1} = \log(2k+1) - \log(2k-1)$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \log(2k+1) - \log(2k-1) \} \\ &= (\log 3 - \log 1) + (\log 5 - \log 3) + (\log 7 - \log 5) + \cdots + \\ &\quad \{ \log(2n+1) - \log(2n-1) \} \\ &= -\log 1 + \log(2n+1) = \log(2n+1) \end{aligned}$$

7. 해수면의 빛의 밝기가 A 인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소한다고 한다. 깊이가 x m 인 곳의 빛의 밝기를 L 이라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$$L = Ak^x \text{ (단, } k \text{ 는 } k \neq 1 \text{ 인 양의 상수)}$$

이 지역의 바다에서 깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기의 50% 일 때, 물속에서의 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심은 am 이다. 이때, 실수 a 의 값을 구하여라. (단, $\log_2 3 = 1.6$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

깊이가 20m 인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기 A 의 50% 이므로

$$Ak^{20} = \frac{1}{2}A \quad \therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

따라서, 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$ 이 되는 지점의 수심을 x m라 하면

$$A \cdot 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}A \quad \therefore 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}$$

위의 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$-\frac{x}{20} = \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 6$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 20(\log_2 2 + \log_2 3) \\ &= 20(2 + 1.6) = 72(\text{m}) \end{aligned}$$

8. $p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$
 $\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 에 대하여 $2 - p = 2^k$ 일 때, 실수 k 의 값은?

- ① -5 ② -16 ③ -30 ④ -31 ⑤ -32

해설

$$\begin{aligned} p &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \text{의 양변에 } \left(1 - \frac{1}{2}\right) \text{을 곱하면} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right) p &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{32}} \\ \frac{1}{2}p &= 1 - \frac{1}{2^{32}}, \quad p = 2 - \frac{1}{2^{31}} \\ 2 - p &= \frac{1}{2^{31}} = 2^{-31} \\ \therefore k &= -31 \end{aligned}$$

9. 어떤 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5 회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7 회째 복사본에서 도형의 넓이는 4 회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

- ① $\sqrt{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A , 확대 배율을 a 라 놓으면 5 회째 복사본에서 도형의 넓이는

$$A \cdot a^5 \text{ 이므로 } A \cdot a^5 = 2A \text{ 에서 } a^5 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt[5]{2}$$

7 회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$,

4 회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

10. 두 실수 x, y 가 등식 $25^x = 3^y = 64$ 를 만족할 때, 다음 중 $x, y, \frac{y}{x}$ 의 대소관계를 옳게 나타낸 것은?

- ① $x < y < \frac{y}{x}$ ② $x < \frac{y}{x} < y$ ③ $\frac{x}{y} < x < y$
 ④ $y < \frac{y}{x} < x$ ⑤ $y < x < \frac{y}{x}$

해설

$25^x = 64$ 에서

$$x = \log_{25} 64 = \log_{5^2} 2^6 = 3 \log_5 2 = \frac{3}{\log_2 5} \text{ 이고,}$$

$$\frac{3}{\log_2 8} < \frac{3}{\log_2 5} < \frac{3}{\log_2 4} \text{ 이므로}$$

$$1 < x < \frac{3}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

$3^y = 64$ 에서

$$y = \log_3 64 = \log_3 2^6 = 6 \log_3 2 = \frac{6}{\log_2 3} \text{ 이고}$$

$$\frac{6}{\log_2 4} < \frac{6}{\log_2 3} < \frac{6}{\log_2 2} \text{ 이므로}$$

$$3 < y < 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{6}{\log_2 3}}{\frac{3}{\log_2 5}} = 2 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} > 2 (\because \log_2 3 < \log_2 5) \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\frac{y}{x} - y = \frac{y(1-x)}{x} < 0, \quad \frac{y}{x} - x = \frac{y-x}{x} > 0$$

$$\therefore x < \frac{y}{x} < y$$