

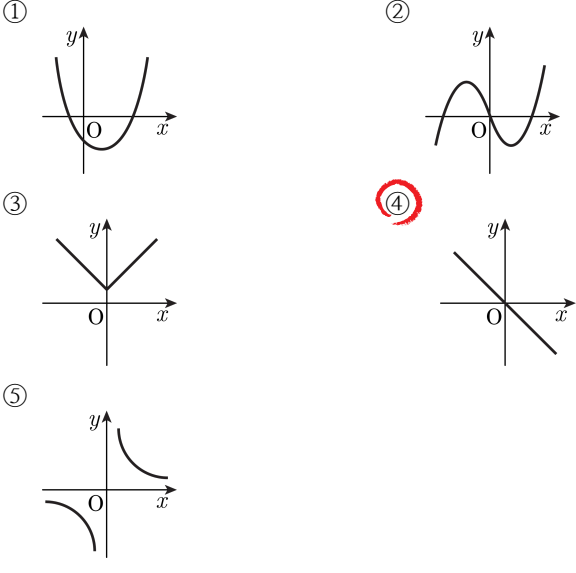
1. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x - 1)(x + 2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

2. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤번은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

3. 일차함수 $y = px + q$ 의 역함수가 $y = -5x + 7$ 일 때, 상수 p, q 의 합 $p + q$ 는?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{6}{5}$

③ 4

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 8

해설

$y = -5x + 7$ 의 역함수를 구하면

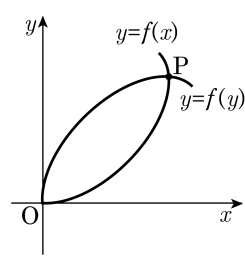
$$x = -5y + 7, y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$p = -\frac{1}{5}, q = \frac{7}{5}$$

$$\therefore p + q = \frac{6}{5}$$

4. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

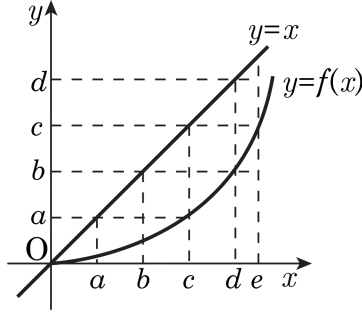
- ① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
 ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 2)$
 ⑤ $(2, 3)$



해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의 교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다. 따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로 $(2, 2)$ 이다.

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은 얼마인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(a) = (f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(a)) \cdots \textcircled{1}$
 $f^{-1}(a) = m$ 으로 놓으면 $f(m) = a$ 이고,
 그래프에서 $f(c) = a$ 이므로 $m = c$
 $\therefore f^{-1}(a) = c$
 이 때, $\textcircled{1}$ 에서
 $(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) \cdots \textcircled{2}$
 또, $f^{-1}(c) = n$ 으로 놓으면 $f(n) = c$ 이고
 그래프에서 $f(e) = c$ 이므로 $n = e$
 $\therefore f^{-1}(c) = e$
 따라서, $\textcircled{2}$ 에서
 $(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) = e$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

7. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ -2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -1

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 4

해설

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = (f \circ f)^{-1}(4) = a$ 라 놓으면,

$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = 4$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$ 이므로 $f(a) = -2$

또, $f(1) = -2 \cdot 1 = -2$

$\therefore a = 1$

9. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 7$ 일 때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
 $g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.
 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3))$
 $= f^{-1}(2)$
 $(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$
그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로
이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
 $4a^2 = 1$
 $\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$

10. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$

$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

11. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

$$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

$$f(f(f(x))) = x \text{ 이므로 } 8x - 21 = x$$

$$\therefore x = 3$$

13. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$$(f \circ f)(x) = (x^3 + x^2 + x - 5)^3 + (x^3 + x^2 + x - 5)^2 + (x^3 + x^2 + x - 5) - 5$$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x=1$ 을 대입한 것과 같다.

$f(1) = -2$ 이므로

$$\therefore f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$$

14. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

15. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$$f(h(2)) = g(2) \text{ 에서, } h(2) = a \text{ 라 두면, } g(2) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(a) = 3, \frac{a-1}{a+2} = 3$$

$$\text{이를 풀면 } \therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$$

16. 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$)

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

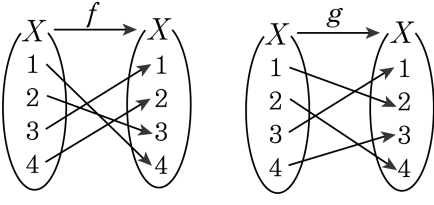
해설

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f^2(-1) = 2, \quad f^3(-1) = -1, \quad f^4(-1) = \frac{1}{2} \quad \dots$$

주기가 3 으로 반복되므로

$$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$$

17. 두 함수 f, g 가 각각 다음 그림과 같이 정의될 때, $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 f 는 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

이 때, $f(4) = 2$ 이므로 $f^{-1}(2) = 4$

$\therefore (g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2)) = g(4) = 3$

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

19. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} = x\end{aligned}$$

$$\therefore x^3 = x, \quad x^3 - x = 0, \quad x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1 \text{ or } 0$

$$\therefore -1 + 0 = -1$$

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

21. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

22. 함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = \frac{x-1}{2}$ ② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ ③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$

④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라고 놓으면 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$$

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f\left(\frac{1-2x}{3}\right)$ 와 같은 것은?

① $3-2x$

② $1-4x$

③ $1-3x$

④ $1-2x$

⑤ $3-4x$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3x+2 \text{ 에서 } \frac{x+1}{2} = t \text{ 라고 하면}$$

$$x = 2t-1 \text{ 이므로 } f(t) = 3(2t-1)+2 = 6t-1$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-2x}{3}\right) &= 6\left(\frac{1-2x}{3}\right)-1 \\ &= 2-4x-1 = 1-4x \end{aligned}$$

24. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1, h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

25. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

- ① -10
- ② -5
- ③ 1
- ④ 5
- ⑤ 11

해설

$f(x) = x - 1$
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$
 $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$
 $\vdots$
 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

26. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 의 역함수를 각각 f^{-1} , g^{-1} 라고 할 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(5)$ 의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f &= f \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f \\ &= f \circ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= f \circ g^{-1} \circ I \\ &= f \circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $(f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 5$

$-k + 2 = 5$ 에서 $k = -3$, 즉 $g^{-1}(5) = -3$

$\therefore f(g^{-1}(5)) = f(-3) = 2 \times (-3) - 1 = -7$

27. 두 함수 f, g 를 $f(x) = x - 1, g(x) = 2x + 4$ 로 정의할 때, $(f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f \\ &= f \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot f \\ &= g^{-1} \cdot f \\ &\therefore (f \cdot (g \cdot f)^{-1} \cdot f)(3) \\ &= (g^{-1} \cdot f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) \\ &\text{이 때, } g^{-1}(2) = a \text{ 라 하면} \\ &g(a) = 2 \text{ 에서 } 2a + 4 = 2 \\ &\therefore a = -1 \end{aligned}$$

28. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a = -\frac{3}{2}$

② $a = -\frac{5}{2}$

③ $a = -\frac{7}{2}$

④ $a = -\frac{9}{2}$

⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

29. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f, g 가 각각 $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(f \circ g^{-1})(k) = 2$ 를 만족하는 실수 k 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$(f \circ g^{-1})(k) = 2 \text{ 에서 } f(g^{-1}(k)) = 2$$

$$g^{-1}(k) = t \text{ 로 놓으면 } f(t) = 2$$

$$3t - 4 = 2$$

$$\therefore t = 2$$

$$\text{따라서 } g^{-1}(k) = 2 \text{ 이므로 } g(2) = k$$

$$\therefore k = g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

30. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \frac{100x + 200}{f(x)}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$$

$$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2 (\because k > 0)$$

$$\therefore (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2)$$

$$= \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$