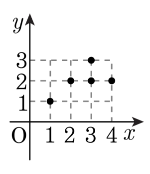
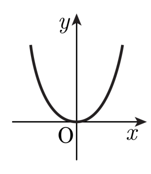
1. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

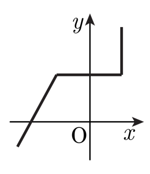
①



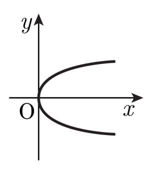
②



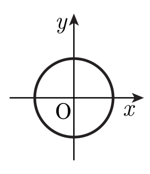
③



④



⑤

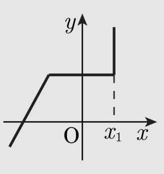


해설

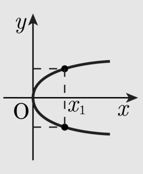
X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.

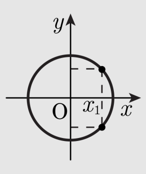
①$f(3) = 2$, $f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.

③x_1 에 대응하는y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.





2. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\left\{y|y\text{는 정수}\right\}$ 일 때, 함수 $f:X\to Y$를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x>0) \\ -x^2+1 & (x\le 0) \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$f(-2)=-(-2)^2+1=-3$

$f(-1)=-(-1)^2+1=0$

$f(0)=1$

$f(1)=1+2=3$

$f(2)=2+2=4$

따라서 치역은 $\{-3,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4\}$이므로

모든 원소의 합은 $(-3)+0+1+3+4=5$

3. 다음 (   ) 안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 (   ) 이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

해설

4. 다음 중 항등함수를 찾으면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$
④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

5. 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 중 X에서 X로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$f(x)=x,\quad g(x)=|x|$
$h(x)=x^3,\quad k(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{2}$

① f ② $f,\ h$ ③ $f,\ g,\ h$
④ $f,\ h,\ k$ ⑤ $g,\ h,\ k$

해설

$f : f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$이므로 항등함수이다.
$g : g(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.
$h : h(-1)=-1,\ h(0)=0,\ h(1)=1$이므로 항등함수이다.
$k : k(-1)=-1,\ k(0)=0,\ k(1)=1$이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 $f,\ h,\ k$이다.

6. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉡, ㉤　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의 넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

7. 자연수 전체의 집합 N에 대하여 함수 $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 을 $f(n) =$ (n의 양의 약수의 개수)로 정의한다. 이 때, 집합 $\mathrm{A} = \{n | f(n) = 2\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in \mathrm{A}$　　② $2 \in \mathrm{A}$　　③ $4 \in \mathrm{A}$

④ $6 \in \mathrm{A}$　　⑤ $10 \in \mathrm{A}$

해설

$f(n) = 2$란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

8. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$　　② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$　　④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$f(x) = g(x)$이므로
$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서
$3x^2 - 12x - 15 = 0,\ 3(x^2 - 4x - 5) = 0$
$(x-5)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = 5,\ -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.
$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

10. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq (x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 15개　　② 60개　　③ 120개

④ 125개　　⑤ 243개

해설

「$x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$」는
일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1,\ 2,\ 3\}$이고
$Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
일대일 함수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$(개)

11. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

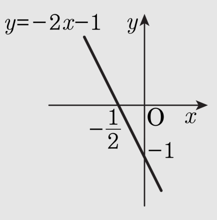
① $y = -x^2$　　② $y = -|x|$

③ $y = 3$　　④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.
또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역)$\neq$ (치역)
④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로
일대일대응이다.
⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로
일대일 함수이지만 (공역)$\neq$ (치역) 이다.

12. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \to Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

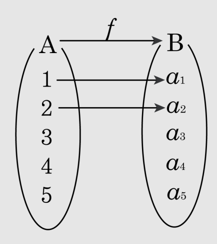
집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.



따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)

14. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

15. $0 \le x \le 1$ 일 때 $f(x)=x(1-x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. 이 때 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값은?

① $-\frac{3}{16}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

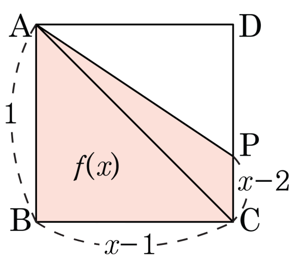
해설

$f(x+1)=\frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)$

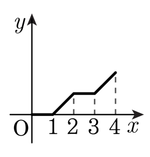
$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

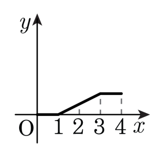
16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



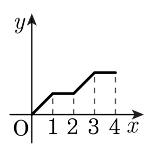
①



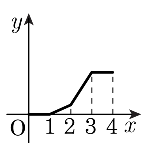
②



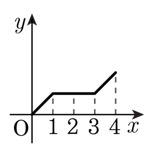
③



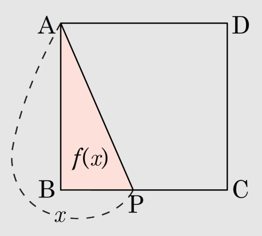
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

17. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,
$\{3, 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2 = 6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개