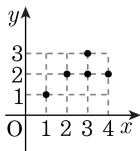
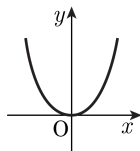


1. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

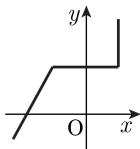
①



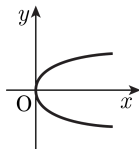
②



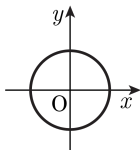
③



④



⑤

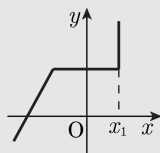


### 해설

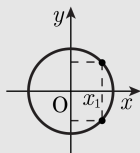
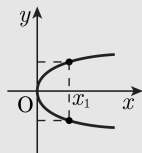
$X$ 의 각 원소에  $Y$ 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.

①  $f(3) = 2$ ,  $f(3) = 3$  이므로 함수가 아니다.

③  $x_1$ 에 대응하는  $y$ 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤  $x_1$ 에 대응하는  $y$ 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.



2. 두 집합  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$  일 때, 함수  $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때,  $f$ 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x > 0) \\ -x^2 + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은  $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

$$\text{모든 원소의 합은 } (-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$$

3. 다음 (        )안에 알맞은 말을 써라.

함수  $f(x)$  의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 (        )이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

해설

4. 다음 중 항등함수를 찾으려면?

①  $f(x) = x$

②  $f(x) = x + 1$

③  $f(x) = x - 1$

④  $f(x) = x^2$

⑤  $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는  $f(x) = x$  또는  $y = x$  이다.

5. 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중  $X$ 에서  $X$ 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$f(x) = x, \quad g(x) = |x|$$
$$h(x) = x^3, \quad k(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$$

①  $f$

②  $f, h$

③  $f, g, h$

④  $f, h, k$

⑤  $g, h, k$

해설

$f : f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로  
항등함수이다.

$g : g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.

$h : h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로  
항등함수이다.

$k : k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로  
항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은  $f, h, k$ 이다.

6. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉣, ㉤

해설

- ㉠ 모든 원의 반지름의 길이  $r$ 는 오직 하나의 넓이  $\pi r^2$ 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉡ 이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$ 에서  $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근),  $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
- ㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
- ㉤ 특정한 실수  $a$ 를 포함하는 집합은  $\{a\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{a, b, c\}$ ,  $\dots$  등 무수히 많다. 즉, 실수  $a$ 에  $a$ 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다. 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

7. 자연수 전체의 집합  $N$ 에 대하여 함수  $f : N \rightarrow N$  을  $f(n) = (n \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의한다. 이 때, 집합  $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

①  $1 \in A$

②  $2 \in A$

③  $4 \in A$

④  $6 \in A$

⑤  $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

8. 함수  $f(x)$  는 임의의 두 실수  $a, b$  에 대하여  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

①  $f(x) = |x|$

②  $f(x) = -x^2$

③  $f(x) = 3x$

④  $f(x) = 2x + 3$

⑤  $f(x) = x^3 + 3x$

해설

①  $f(a+b) = |a+b|$

$$f(a) + f(b) = |a| + |b|$$

이 때  $|a+b| \leq |a| + |b|$

②  $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$$

③  $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④  $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$$

⑤  $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$$

$$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$$

$$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$$

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합  $X$ 를 정의역으로 하는 두 함수  $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$ ,  $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합  $X$ 의 개수는 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$ ,  $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$\therefore x = 5, -1$

즉,  $x = 5$  또는  $x = -1$ 일 때  $f(x) = g(x)$ 이다.

$\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

10. 두 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중에서  $X$ 의 임의의 두 원소  $x_1, x_2$ 에 대하여  $x_1 \neq x_2$  일 때,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  인 함수는 몇 개인가?

① 15개

② 60개

③ 120개

④ 125개

⑤ 243개

### 해설

「 $x_1 \neq x_2$  일 때,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」는  
일대일 함수를 의미한다.

즉,  $X = \{1, 2, 3\}$ 이고

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

일대일 함수는  $5 \times 4 \times 3 = 60(\text{개})$

11. 다음은 실수 전체의 집합  $R$  에서  $R$  로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?

①  $y = -x^2$

②  $y = -|x|$

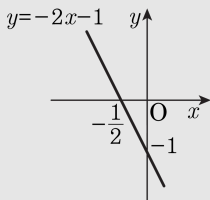
③  $y = 3$

④  $y = -2x - 1$

⑤  $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

### 해설

①  $-1 \neq 1$  이지만  $f(-1) = f(1) = -1$  이므로  
일대일 함수가 아니다.



또,  $f(X) \leq 0$  이므로 (공역)  $\neq$  (치역)

②  $-1 \neq 1$  이지만  $f(-1) = f(1) = -1$  이므로  
일대일 함수가 아니다.

또,  $f(X) \leq 0$  이므로 (공역)  $\neq$  (치역)

③ 모든  $x \in X$  에 대하여  $f(x) = 3$  이므로  
일대일 함수가 아니다.

또,  $f(X) = 3$  이므로 (공역)  $\neq$  (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역) = (치역) = (실수 전체의 집합) 이므로  
일대일대응이다.

⑤  $x \geq 1$  일 때,  $f(X) \geq 0$  이므로  
일대일 함수이지만 (공역)  $\neq$  (치역) 이다.

12. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d\}$  에 대하여 집합  $X$  에서 집합  $Y$  로의 함수  $f : X \rightarrow Y$  의 개수는?

- ① 12 개      ② 27 개      ③ 36 개      ④ 64 개      ⑤ 81 개

해설

집합  $X$  의 원소  $-1, 0, 1$  에 대응될 수 있는  
집합  $Y$  의 원소가 각각 4 개씩이므로  
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

13. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 집합  $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  로의 대응  $f$  중  $f(1) = a_1, f(2) = a_2$  인 함수  $f$  의 개수는?

① 8 개

② 25 개

③ 64 개

④ 81 개

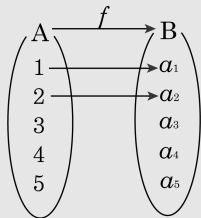
⑤ 125 개

### 해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$  인 함수

$f : A \rightarrow B$  는 다음 그림에서  $A$  의 원소 3, 4, 5 에  $B$  의 원소  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는  $5 \times 5 \times 5 = 125$  (개)



14. 공집합이 아닌 두집합  $X, Y$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f(x) = x^2 - x - 3$ ,  $g(x) = x + 5$ 에 대하여  $f = g$ 일 때, 정의역  $X$ 가 될 수 있는 집합의 개수는  $a$ 개이다.  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

#### 해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합  $X$ 는 방정식  $f(x) = g(x)$ 를 만족하는  $x$ 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합  $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역  $X$ 가 될 수 있으므로 집합  $X$ 의 개수는  $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

15.  $0 \leq x \leq 1$  일 때  $f(x) = x(1-x)$  이고 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$  를 만족하는 함수  $f(x)$ 가 있다. 이 때  $f\left(\frac{5}{2}\right)$  의 값은?

①  $-\frac{3}{16}$

②  $-\frac{1}{16}$

③  $\frac{1}{16}$

④  $\frac{3}{16}$

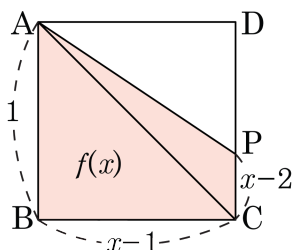
⑤  $\frac{1}{4}$

해설

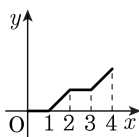
$$f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

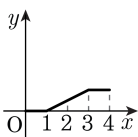
16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변  $ABCD$  위를 움직이는 동점  $P$ 가 있다. 점  $P$ 는  $A$  점에서 출발, 일정한 속력으로 점  $B$ 를 돌아 다시 점  $A$ 로 돌아온다. 점  $P$ 가 움직인 거리를  $x$ , 선분  $AP$ 가 지나간 부분의 넓이를  $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



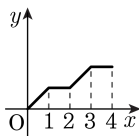
①



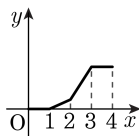
②



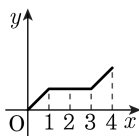
③



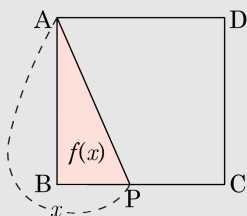
④



⑤



해설



$x$ 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

17. 집합  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$  에 대하여 함수  $f : X \rightarrow Y$  에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수  $f$  의 개수를 구하시오.

▶ 답 :      개

▷ 정답 : 36      개

#### 해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

$\{3, 4\}$ 로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는  $2^3 = 8$  인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로  $8 - 2 = 6$  따라서  $6 \times 6 = 36$  개