1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)$=0$, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. $\frac{a}{1-i}+\frac{b}{1+i}=5$ 를 만족하는 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$\frac{a(1+i)}{2}+\frac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10$,

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

3. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$($x, y$는실수)
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{i-2} = i+2$ ② $\overline{2i} = -2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i} = \sqrt{2}-i$ ④ $\overline{1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i} = 3+2i$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.
실수의 켤레복소수는 자기자신이다.
① $\overline{i-2} = -i-2$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$의 값은?

① $1-\sqrt{2}$　② $-1-\sqrt{2}$　③ $(1+\sqrt{2})i$
④ $-(1+\sqrt{2})i$　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

6. $x = \dfrac{3+i}{2}$ 일 때, $p = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$　　② $2-i$　　③ $-2+i$
④ $-4+i$　　⑤ $4+i$

해설
$x = \dfrac{3+i}{2}$ 에서 $2x - 3 = i$
$(2x-3)^2 = i^2$ 에서 $2x^2 - 6x + 5 = 0$
나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면
$2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$
$= (2x^2 - 6x + 5)(x + 2) + 2x - 7$
$= 2x - 7$
$= 2\left(\dfrac{3+i}{2}\right) - 7$
$= -4 + i$

7. $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$w^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$

$1 + w + w^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$
$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$
$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$
$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$
$= 1 + w = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

8. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $i,\ -i$ ④ -1 ⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로
$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1이 홀수 개가 있다.
(i) -1이 $4k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$개일 때
$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$$
(ii) -1이 $4k+3$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$개일 때
$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$$
따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

9. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $2z+3\bar{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ ② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ③ $-1-2i$
④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면
$2z+3\bar{z}=5-2i$
$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$
$5a-bi=5-2i$
복소수 상등에 의하여
$a=1,\ b=2$
$\therefore\ z=1+2i$
(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$