

1. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

i) $\textcircled{1}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

ii) $\textcircled{1}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

2. 방정식 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x+1)^2 + 2(y-1)^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore \text{반지름 길이 } \sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

4. 두 정점 $A(-3, 0)$, $B(2, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ 인 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

- ① 12π ② 16π ③ 32π ④ 36π ⑤ 64π

해설

점 P 의 자취는 \overline{AB} 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 끝으로 가지는 원의 방정식과 같다.

\Rightarrow 내분점은 $\left(\frac{3 \times 2 + 2 \times (-3)}{5}, 0\right) = (0, 0)$ 이고,

외분점은 $\left(\frac{3 \times 2 - 2 \times (-3)}{1}, 0\right) = (12, 0)$ 이다.

\therefore 반지름은 6 이고, 중심이 $(6, 0)$ 인 원

\therefore 자취의 길이는 $2 \times \pi \times 6 = 12\pi$

5. 원점을 중심으로 하고, 점 (3, -4)를 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + 2y^2 = 41$ ② $2x^2 + y^2 = 34$ ③ $x^2 + y^2 = 25$
④ $x^2 + y^2 = 16$ ⑤ $x^2 + y^2 = 9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

① 이 점 (3, -4) 를 지나므로

$$3^2 + (-4)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$$

이 때, ①은 $x^2 + y^2 = 25$

6. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, a 의 값을 구하면?

- ① 3 또는 20 ② 3 또는 23 ③ 2 또는 18
④ 2 또는 25 ⑤ 4 또는 30

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

원의 중심 (3, 1) 에서 직선까지의 거리

d 가 2이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23