1. 복소수 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

2. 등식 $(4+i)x+2+2yi=2+5i$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 5 ⑤ 3

해설

$(4x+2)+(x+2y)i=2+5i$
$4x+2=2,\ x+2y=5$

3. 복소수 $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\dfrac{2+3i}{1-i}=\dfrac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-1+5i}{2}$

$\therefore\ a+b=\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}=2$

4. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$ ② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$ ④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

6. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$ 이면,
$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

7. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

8. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

9. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z+\bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z-\bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

㉢ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

$b=0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)=(a+bi+1)(a-bi+1)$

$=(a+1+bi)(a+1-bi)$

$=(a+1)^2+b^2$ (실수)

10. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \bar{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

11. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

12. $x = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2-2x$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

$x=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $3x-1=-\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2-6x+1=-2$, $9x^2-6x=-3$

양변을 3 으로 나누면

$\therefore\ 3x^2-2x=-1$

13. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

$z^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \dfrac{2}{1-2i+i^2} = \dfrac{2}{-2i} = -\dfrac{1}{i}$

$= -\dfrac{i}{i^2} = i$

$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$

$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$

14. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$

$n=4k+1 \ \Rightarrow \ f(n)=-i^{4k+1}=-i$

$n=4k+2 \ \Rightarrow \ f(n)=2\pi$

$n=4k+3 \ \Rightarrow \ f(n)=-i$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$

계속 반복되므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$

$=i\times 501+f(2005)$

$=501i-i=500i$

15. $\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ±1　　② $\pm2i$　　③ ±2　　④ $\pm i$　　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a+bi \\ z = a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$