

1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1 + \sqrt{-4}$, $3 + 4i$, 9 , $i^2 + 1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a + bi$ 에서 $b = 0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
 $2i$ 의 허수 부분은 2, $1 + \sqrt{-4} = 1 + 2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
 $3 + 4i$ 의 허수 부분은 4이다.
 9 와 $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 $i^2 + 1$ 로 두 개다.

2. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi) = 8-2i$ 에서 $4x+4yi = 8-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4x = 8, 4y = -2$$

$$\therefore x = 2, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore xy = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

3. 복소수 $z = a + bi$ 일 때, z 의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$ 로 나타낸다. 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b 는 실수)

① $\overline{2+i} = 2-i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2+\sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i+1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i-1$ 의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i-1$ 이다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$
 $= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$
(i) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
(ii) $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2) \neq 0$
 $\therefore x \neq 1$ 또는 $x \neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

5. $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② 2 ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

6. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 5

㉡ 7

㉢ $2\sqrt{3} + 4i$

㉣ 12

㉤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$x + y = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}$$

7. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉡ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
- ㉡ (생략)
- ㉢ $\alpha = x + yi$ 라 하면
 $\alpha\beta = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2(x, y \text{는 실수})$
 $x^2 + y^2 = 0$ 이려면 $x = 0, y = 0$
즉, $\alpha = 0$

8. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

- ① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$
④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2+5x-6} &= -\sqrt{(x-3)(2-x)} \\ &= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x} \text{ 이려면}\end{aligned}$$

$(x-3)(2-x)$ 에서

$$\textcircled{1} \ x-3 \leq 0, \ x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \ 2-x \leq 0, \ x \geq 2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

9. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$ 가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y) 로 표현되는 도형과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

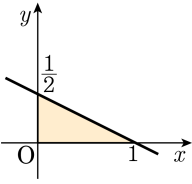
$$(\text{준식}) = (2x - 2y) + (x + 2y - 1)i = 0$$

$$\therefore x + 2y - 1 = 0,$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{넓이} = \frac{1}{4}$$



10. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 최댓값은?

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$$

$$x = 1 \text{ 또는 } 2y = \pm 2$$

$$\therefore (xy \text{의 최댓값}) = 4$$

11. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad a = 2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5, \quad b^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

12. $\sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{4}\sqrt{-4} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1 + 4i$

② $2 + 4i$

③ $-2 + 4i$

④ $-2 + i$

⑤ $-2 - 4i$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{4}\sqrt{-4} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} + 2 \cdot 2i + \frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}} = -2 - i + 4i + i = -2 + 4i \end{aligned}$$

13. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) (\text{단, } k \text{는 정수}) \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수) 이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

- ① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$$\begin{aligned} n = 4k &\Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i \\ n = 4k + 1 &\Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i \\ n = 4k + 2 &\Rightarrow f(n) = 2i \\ n = 4k + 3 &\Rightarrow f(n) = -i \\ \therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) &= -i + 2i - i + i = i \\ &\text{계속 반복되므로} \\ f(1) + f(2) + \cdots + f(2005) &= i \times 501 + f(2005) \\ &= 501i - i = 500i \end{aligned}$$

14. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족하는 복소수 z 의 개수는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 없다.

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ (단, a, b 는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$$(2+3i)(a+bi) + (2-3i)(a-bi) = 2$$

$$(2a-3b) + (3a+2b)i + (2a-3b) - (3a+2b)i = 2$$

$$2(2a-3b) = 2$$

$$\therefore 2a-3b = 1$$

따라서 $2a-3b=1$ 을 만족하는 a, b 는 무수히 많고, $z = a + bi$ 이므로 문제의 조건을 만족하는 z 가 무수히 많음을 알 수 있다.

15. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

$$\text{양변을 제곱해서 정리하면 } x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$