1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1+\sqrt{-4}$, $3+4i$, 9, i^2+1

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
$3+4i$ 의 허수 부분은 4이다.
9와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 i^2+1 로 두 개다.

2. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 에서 $4x+4yi=8-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x=8$, $4y=-2$

$\therefore\ x=2,\ y=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ xy=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

3. 복소수 $z = a + bi$ 일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i} = 2 - i$

② $\overline{-2 - \sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i + 1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i - 1$의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i - 1$이다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

5. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$　② 2　③ $\dfrac{8}{5}$　④ $\dfrac{8}{3}$　⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

6. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5　② 7　③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12　⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

7. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2(x,y$는실수$)$
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

8. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$

④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{(x-3)(2-x)}$

$= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$이려면

$(x-3)(2-x)$ 에서

㉠ $x-3 \leq 0,\quad x \leq 3$

㉡ $2-x \leq 0,\quad x \geq 2$

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로

$\therefore\ 2 \leq x \leq 3$

9. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

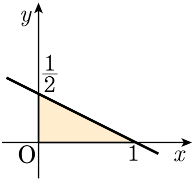
$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



10. 등식 $(x^2-3x+1)+(y^2-1)i=-1+3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2-3x+1=-1 \quad y^2-1=3$

$x=1$ 또는 $2y=\pm2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$)=\ 4$

11. 복소수 $z=a+bi$(단, a, b는 실수)와 그 컬레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $z+\bar{z}=4$, $z\bar{z}=5$일 때, a^2-b^2의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$z+\bar{z}=2a=4,\ a=2$

$z\bar{z}=a^2+b^2=5\ ,\ b^2=1$

$\therefore\ a^2-b^2=4-1=3$

12. $\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1+4i$ ② $2+4i$ ③ $-2+4i$

④ $-2+i$ ⑤ $-2-4i$

해설

$$\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+2\cdot 2i+\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}=-2-i+4i+i=-2+4i$$

13. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$

$n=4k+1 \Rightarrow f(n)=-i^{4k+1}=-i$

$n=4k+2 \Rightarrow f(n)=2\pi$

$n=4k+3 \Rightarrow f(n)=-i$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$

계속 반복되므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$

$=i\times 501+f(2005)$

$=501i-i=500i$

14. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족하는 복소수 z의 개수는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore\ 2a-3b=1$

따라서 $2a-3b=1$을 만족하는 $a,\ b$는 무수히 많고, $z=a+bi$이므로 문제의 조건을 만족하는 z가 무수히 많음을 알 수 있다.

15. $x=-1+i$ 일 때, $x^4+2x^3+x^2-x-1$ 의 값을 구하면?

① $-1+i$ ② $-i$ ③ i

④ -1 ⑤ 1

해설

$x=i-1 \Rightarrow x+1=i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2+2x+2=0$

$x^4+2x^3+x^2-x-1$

$=x^2(x^2+2x+2)-x^2-x-1$

$=-x^2-x-1$ $(\because\ x^2+2x+2=0)$

$=-(-2x-2)-x-1$

$=x+1=i$