1. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$
$\Rightarrow x = -2, \ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

2. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$
② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$
③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$
④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$
⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5\left(b^2 - 4\right) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

3. 점$(2,\ 1)$ 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 $(2,\ 1)$ 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

4. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

5. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2x-3y+1=0$　② $x^2+y^2-5x-y+4=0$
③ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$　④ $x^2+y^2+4x+2y+2=0$
⑤ $x^2+y^2-5x+4y+3=0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+k\left(x^2+y^2-6x-2y+8\right)=0$
$(k \neq -1$인 실수$)$
이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로
$1-4+k(1-6+8)=0$
$-3+3k=0 \qquad \therefore k=1$
따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는
원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+8=0$
$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$

6. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

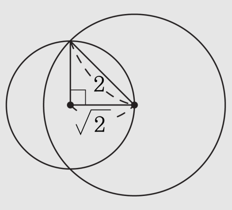
① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

7. 평행이동 $f:(x, y) \rightarrow (x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1, 2)$ 가 점 $(-1, 4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2, -2)$　　② $(2, 2)$　　③ $(2, 0)$
④ $(-2, 2)$　　⑤ $(4, 2)$

해설

$(1+a, 2+b) = (-1, 4)$
$\Rightarrow \quad a = -2, \quad b = 2$
$\therefore \quad (x+2, y+2) = (0, 0)$
$\Rightarrow \quad x = 2, \quad y = -2$
$\Rightarrow \quad (2, -2)$

8. 직선 $y = 2x - 5$ 를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하였다. 이때, a, b 사이의 관계식은?

① $2a - b = 5$　　② $2a - b = -10$　　③ $2a + b = 5$

④ $2a + b = 10$　　⑤ $2a - b = 10$

해설

$y = 2x - 5$, x 축 방향으로 a , y 축 방향으로 b만큼 이동시키면,

$y - b = 2(x - a) - 5$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 2a + b - 5$

$\therefore \quad -2a + b - 5 = 5$

$\Rightarrow \quad 2a - b = -10$

9. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{5}{4}$　　③ 3　　④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ -8

해설

직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2) + 4(y+3) - 5 = 0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x + 4y + 1 = 0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

10. 점 (2, 3) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 (2, 3) 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 (2, 3) 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4, y 축으로 -6만큼 평행이동 시킨 것과 같다
$\therefore\ m+n=-4-6=-10$

11. 원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로
3 만큼 평행이동하면 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$
이 원을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$(y-3)^2+(x+1)^2=4$,
$\therefore\ (x+1)^2+(y-3)^2=4$ 이
$(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 와 일치하므로
$a=-1$, $b=3$
$\therefore\ a+b=2$

12. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

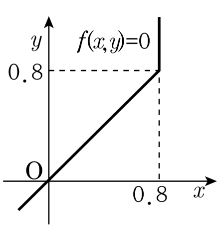
13. 점$(1, 3)$을 점$(-1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(1,\ -3)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

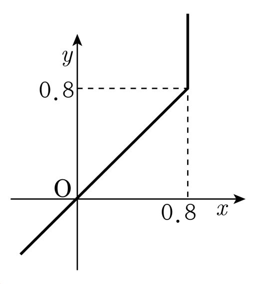
해설

대칭이동한 점을 (a, b)라고 하면
점 (a, b)와 점 $(1, 3)$의 중점이
점 $(-1, 2)$이므로
$\frac{a+1}{2} = -1, \frac{b+3}{2} = 2$에서
$a = -3, b = 1$
$\therefore (-3,\ 1)$

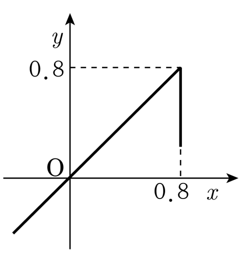
14. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y, -x) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



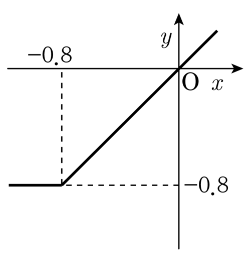
①



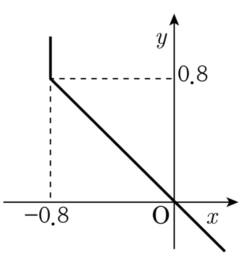
②



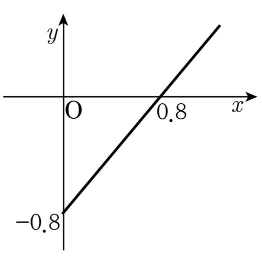
③



④



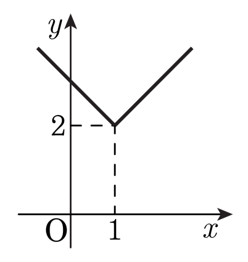
⑤

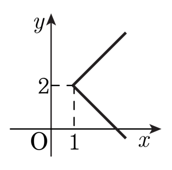


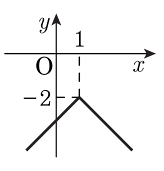
해설

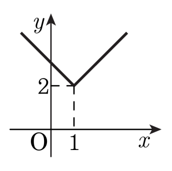
$f(-y, -x) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을
직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

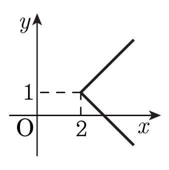
15. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은?

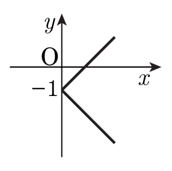


①


②


③


④


⑤


해설

도형 $f(x, y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y, x) = 0$ 이 된다.
따라서 $(1, 2)$ 는 $(2, 1)$ 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

16. $y=x^2-2x+3$ 을 평행이동 $f:(x,y)\rightarrow(x+2,y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y=x^2+2x+4$ ② $y=x^2+2x+2$

③ $y=x^2+2x+3$ ④ $y=x^2-6x+8$

⑤ $y=x^2-6x+10$

해설

$f:(x,y) \quad \rightarrow \quad (x+2,y-1)$ 에서

$x+2=x', y-1=y'$ 라 하자.

$x=x'-2 \quad y=y'+1$ 을 주어진 식에 대입하면,

$y'+1=(x'-2)^2-2(x'-2)+3$

$y'=x'^2-6x'+10$ 에서 $y=x^2-6x+10$

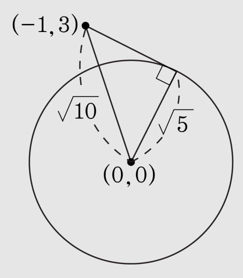
17. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5} = \sqrt{5}$



18. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = \sqrt{3}x \pm 8$　② $y = \sqrt{2}x \pm 8$　③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$
④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$　⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
$\therefore\ y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
$x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
$x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
$D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
$\therefore\ n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
$\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
$\frac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
$\therefore\ n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

19. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-3)$에 의하여 직선 $x+2y-3=0$을 이동한 결과는 $x+2y+a=0$이다. 이 때, a의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

f는 x축의 방향으로 $+2$, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(x-2)+2(y+3)-3=0$ 으로 이동한다. 따라서 $a=1$

20. 두 점 $A(-6, 1)$, $B(2, 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{AB}$ 의 중점 $(-2, 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{AB}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서
$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$
$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$