

1. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나고 $x = 1, y = 2$ 를 점근선으로 할 때 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가

$x = 1, y = 2$ 를 점근선으로 하므로

$y = \frac{k}{x-1} + 2$ 로 놓을 수 있다.

이것이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$2 = -k + 2 \quad \therefore k = 0$

따라서 $y = \frac{2(x-1)}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1}$ 에서

$a = 2, b = -2, c = -1$

$\therefore a + b + c = 2 - 2 - 1 = -1$

2. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$$\therefore c = -7$$

따라서 $f(x) = \frac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

3. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2, y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

4. 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ ($k \neq 0$) 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.
- ㉡ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
- ㉢ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.
㉠, ㉢ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
 $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.
㉡ : $k < 0$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
 $\therefore$ ㉡, ㉢ 이 참.

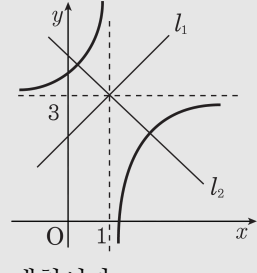
5. 함수 $y = \frac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

- ① 2, -4 ② -2, 4 ③ 2, 4
 ④ -2, -4 ⑤ 3, 5

해설

$$y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 3$$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

$$l_1 : y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \therefore y = x + 2$$

$$l_2 : y - 3 = -1 \cdot (x - 1) \therefore y = -x + 4$$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

6. 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 위의 임의의 점 P와 정점 A에 대하여 점 P의 점 A에 대한 대칭점이 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 위에 있을 때, 점 A의 좌표는?
- ① (1, 2) ② (2, 1) ③ (-1, 2)
- ④ (2, -1) ⑤ (-1, -2)

해설

점 P의 점 A에 대한 대칭점을 Q라 하면 선분 PQ의 중점이 A
이므로 곡선 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 이 점 A에 대하여 대칭이다.

$y = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 2$ 에서

$y = \frac{2x+3}{x-1}$ 은 원점에 대하여 대칭인 곡선

$y = \frac{5}{x}$ 를 x 축의 방향으로 1만큼

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로

점 (1, 2)에 대하여 대칭이다.

[참고-분수식은 점근선의 교점에 관한 점대칭이다.]

7. $y = \frac{-3}{x+1} + 1$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{-3}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 1, y 축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.
- ③ $y = \frac{-3}{x+1}$ 의 그래프를 y 축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ④ 점근선은 $x = -1, y = 1$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{-1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{-3}{x+1} + 1$ 의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1만큼,
 y 축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

8. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ $y = \frac{-1}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 , y 축으로 2 만큼
평행이동한 그래프이다.

㉡ 점근선의 식은 $x = -2$, $y = 2$ 이다.

㉢ 두 직선 $y = -x + 1$, $y = x + 5$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

- ① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{-7}{x+2} + 3$

㉠ 이 분수함수는 $y = \frac{-7}{x}$ 을 x 축으로 -2 ,
 y 축으로 3 만큼 평행이동 시킨 것이다.

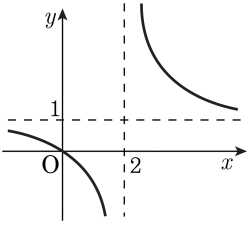
㉡ 점근선은 $x = -2$, $y = 3$ 이다.

㉢ 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 $(-2, 3)$ 을
지나는 직선이다.

$\Rightarrow y = -x + 1, y = x + 5$

9. 함수 $y = \frac{ax-b}{-2x+c}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?
(단, a, b, c 는 상수)

- ① 2 ② 1 ③ 0
④ 1 ⑤ -2



해설

$$\begin{aligned} \text{분수함수 } y &= \frac{ax-b}{-2x+c} \\ &= \frac{ax-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{ac}{2}-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} - \frac{a}{2} \text{의 점근선의} \end{aligned}$$

방정식은 $x = \frac{c}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$ 이므로

$$\frac{c}{2} = 2, \quad -\frac{a}{2} = 1$$

즉, $c = 4$, $a = -2$ 이므로 $y = \frac{-2x-b}{-2x+4}$

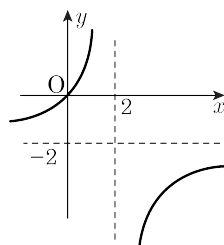
또한, 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{-b}{4} \therefore b = 0$$

$$\therefore a+b+c = 2$$

10. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=-2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -6 ② -4 ③ -3
 ④ 2 ⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=-2$ 이므로 $y = -2 + \frac{k}{x-2}, (k \neq 0)$

점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -2 + \frac{k}{-2}, \quad k = -4$$

$$\text{따라서 } y = -2 + \frac{-4}{x-2} = \frac{-2x}{x-2}$$

$$\therefore a = -2, b = 0, c = -2$$

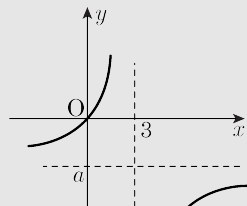
$$\therefore a + b + c = -4$$

11. $0 \leq x \leq 2$ 에서, 유리함수 $y = \frac{-9}{x-3} + a$ 의 최솟값이 0이다. a 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

점근선이 $x = 3, y = a$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 최솟값이 0이므로
점 $(0, 0)$ 을 지난다.



$$0 = \frac{-9}{0-3} + a$$

$$\therefore a = -3$$

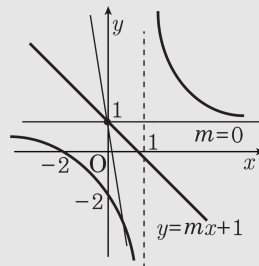
12. 분수함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < m \leq 12$ ② $-12 \leq m < 0$ ③ $-12 < m \leq 0$
 ④ $0 \leq m < 12$ ⑤ $-12 \leq m \leq 12$

해설

$y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 함수 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

- (i) 그림에서 $m = 0$ 일 때
 두 그래프는 만나지 않는다.



- (ii) $y = \frac{x+2}{x-1}$ 와 $y = mx + 1$ 에서

$$\frac{x+2}{x-1} = mx + 1$$

$$\text{즉, } mx^2 - mx - 3 = 0$$

이때, 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 12m < 0, \quad m(m+12) < 0$$

$$\therefore -12 < m < 0$$

- (i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는
 $-12 < m \leq 0$

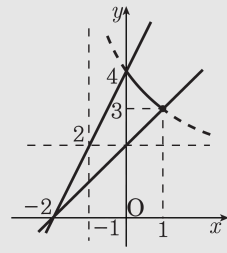
13. 두 집합 $A = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{2x+4}{x+1}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, $B = \{(x, y) \mid y = m(x+2)\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 이 성립하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq m < 2$ ② $m \leq 0, m \geq 2$ ③ $1 \leq m \leq 2$
 ④ $-1 \leq m \leq 1$ ⑤ $m < 1, m \geq 3$

해설

$$y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2 \text{ 이므로}$$

집합 A 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



$y = m(x+2)$ 에서 집합 B 는

점 $(-2, 0)$ 을 지나는 직선들의 모임이다.

이때, $A \cap B \neq \emptyset$ 이려면

두 집합이 나타내는 그래프가 만나야 하므로

직선 $y = m(x+2)$ 가 점 $(1, 3)$ 을 지날 때와

점 $(0, 4)$ 를 지날 때 사이에 존재해야 한다.

따라서, 구하는 m 의 범위는

$$\frac{3-0}{1-(-2)} \leq m \leq \frac{4-0}{0-(-2)}$$

$$\therefore 1 \leq m \leq 2$$

14. 분수함수 $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프는 점 (a, b) 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

분수함수 $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ 에서
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+3}{2x-1} + 3}{2 \cdot \frac{x+3}{2x-1} - 1}$$
$$= \frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)} = x \text{ 이므로}$$
$$y = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x)$$
따라서, $y = f(x)$ 의 점근선은
 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의
교점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로
 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a+b=1$

15. 함수 $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 곡선 $y = g(x)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 곡선 $y = f(x)$ 와 일치한다고 한다. $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+6}{x+2} \text{ 에서 } x = \frac{-2y+6}{y-1} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \frac{-2x+6}{x-1}$$

$$\text{그런데 } f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}, g(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$$

곡선 $g(x)$ 를 x 축 방향으로 -3 만큼,

y 축 방향으로 3 만큼 평행이동하면

$y = f(x)$ 와 일치하므로

$$a = -3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 0$$

16. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+1}{x+1998}$ 가 정의역의 임의의 x 에 대하여 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시킬 때 상수 a 의 값은? (단 $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수 이고 $x \neq 1998$)

① 1998

② -1998

③ 1

④ -1

⑤ 0

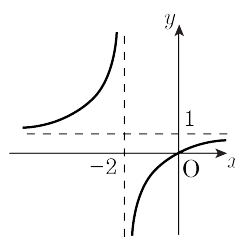
해설

$$y = \frac{ax+1}{x+1998} \text{ 의 역함수는 } y^{-1} = \frac{-1998x+1}{x-a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \text{ 이므로 } a = -1998$$

17. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y = 1 + \frac{k}{x+2}$, ($k \neq 0$)가 점 (0, 0)을 지나므로

$$0 = 1 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 1 + \frac{-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$$

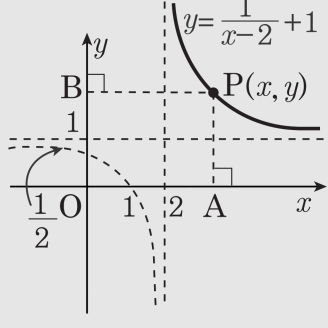
$$\therefore a + b + c = 3$$

18. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$$

(단, 등호는 $x-2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

19. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

- ① -1
- ② $-\frac{5}{2}$
- ③ $-\frac{4}{3}$
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$= \frac{-\frac{10}{2}+3}{\frac{5}{2}-1} = -\frac{4}{3}$$
$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3}+3}{\frac{4}{3}-1} = 1$$
$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$
$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$
$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$
$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$
$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

20. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$
- ② $2\sqrt{6}$
- ③ $4\sqrt{2}$
- ④ $3\sqrt{3}$
- ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$$\frac{x+2}{x-1} = x, \quad x+2 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$A(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), B(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$