

1. $(1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2 + x - 6) + (x^2 - x - 2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 이어야
하므로 $x = -3$ 또는 $x = 2$ 이다.
그런데 $x^2 - x - 2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x = -3$

2. $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ① $\frac{6}{5}$ ② 2 ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

4. $\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$

② $-1-\sqrt{2}$

③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$

⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2}+1) \times (-i) \\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

5. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

- ① $z \cdot \bar{z} = 1$
- ② $z + \bar{z} = 0$
- ③ $z + \bar{z} = 1$
- ④ $z + \bar{z} = -1$
- ⑤ $(z + 1)(\bar{z} + 1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z - \bar{z}) - z\bar{z}(z - \bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z - \bar{z})(1 - z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모) $\neq 0$ 이므로

$$(\text{분자}) = (z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0$$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z\bar{z} = 1$$

6. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

- ① 300 ② 303 ③ 305 ④ 308 ⑤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개, $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$$

$$= a - b + \sqrt{2}i(c - d) = 0$$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a - b, c - d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b, c = d \cdots$ ①

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$$

$$= a + b - 2c - 2d = (a + b) - 2(c + d) = 0$$

$$a + b = 2(c + d)$$

$$2a = 4c(\because \text{①})$$

$$\therefore a = 2c$$

$$\therefore a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$$

$$\therefore n = a + b + c + d = 6a, n \text{ 은 } 6 \text{ 의 배수}$$

7. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$ 를 만족하는 실수를 x, y 라 할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값은? (단, $i^2=-1$)

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$ 일 때,
 $(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$
 $x-y=5x-2, y-2=-3x$
 $\therefore x=0, y=2(x < y \text{이므로 부적합})$
(ii) $x < y$ 일 때,
 $-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$
 $-x+y=5x-2, y-2=-3x$
 $\therefore x=\frac{4}{9}, y=\frac{2}{3}$
 $\therefore \frac{x}{y}=\frac{4}{9} \times \frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

8. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

- ① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\ &= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n \end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k, n = 4k+1, n = 4k+2, n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

9. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켄레복소수이다.)

- $\textcircled{\text{㉠}}$

$\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
- $\textcircled{\text{㉡}}$

$\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.
- $\textcircled{\text{㉢}}$

α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
- $\textcircled{\text{㉤}}$

$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

- ①

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- ②

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- ③

$\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- ④

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- ⑤

$\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}$

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수) 라 하면

$\textcircled{\text{㉠}} \alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

$\textcircled{\text{㉡}} \alpha$ 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

$\textcircled{\text{㉢}} i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

$\textcircled{\text{㉤}} \overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$
 $= (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di)$
 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

$\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= (a - bi)(c - di)$
 $= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

$\therefore$ 참

10. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1

㉡ -1

㉢ i

㉤ $-i$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함)개 있다.

i) -1 이 $4k + 2$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

ii) -1 이 $4k$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

11. $(z - \bar{z}) \times i$ 가 음수이고 $\frac{z}{1+z^2}$ 와 $\frac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1 + i$

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

$$(z - \bar{z}) \times i < 0 \text{ 에서 } -2b < 0 \therefore b > 0$$

$$\frac{z}{1+z^2} \text{ 가 실수이므로}$$

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\therefore z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z\bar{z} = 1 (\because z - \bar{z} \neq 0)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편, } \frac{z^2}{1+z} \text{ 이 실수이므로}$$

$$\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1 (\because z - \bar{z} \neq 0)$$

$$2a = -1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2} (\because b > 0)$$

$$\therefore z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

12. $A = \{x + yi | x^2 + y^2 = 2, x, y \text{는 실수}\}$ 이다.

$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i$ (단, $a : \text{실수}$) 일 때, $\frac{1}{z} \in A$ 가 되는 복소수 z 는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

- ① $2i$ ② $-2i$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2}i$

해설

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i = \frac{1+i}{2a}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2a}{1+i} = a(1-i) = a - ai$$

$$a - ai \in A \text{이므로 } a^2 + a^2 = 2 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$\therefore z = \frac{1+i}{2a} \text{에서 } z = \frac{1+i}{2}, -\frac{1+i}{2}$$

$$\therefore \text{이들의 곱은 } -\frac{i}{2}$$