1. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로
(실수)$^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

2. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$\therefore\ xy + xz = \dfrac{(1+2i)^2}{1-i} + \dfrac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}$

$= \dfrac{-3+4i+5}{1-i}$

$= \dfrac{2+4i}{1-i}$

$= -1 + 3i$

3. $x=\sqrt{3}+2i$, $y=\sqrt{3}-2i$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5　② 7　③ $2\sqrt{3}+4i$

④ 12　⑤ $12+2\sqrt{3}i$

해설

$x+y=2\sqrt{3}$,
$xy=(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)=3-4i^2=7$ 이므로
$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=12-7=5$ 이다.

4. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a + b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2 - \mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1 ② $1 + 2i$ ③ $1 - 2i$

④ -1 ⑤ $2 - 2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2 + i$, $\overline{\mathrm{Z}} = 2 - i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5 - 4 = 1$ 답은 ①

5. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

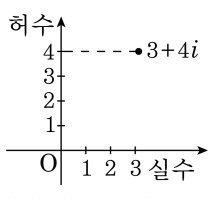
그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

6. 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 (a, b)로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3, 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



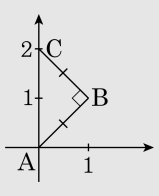
① 정삼각형 ② 이등변삼각형

③ 직각삼각형 ④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

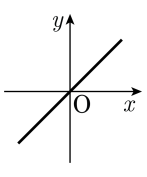
$z = 1 + i$ $z^2 = 2i \Rightarrow$ $B(1, 1)$, $C(0, 2)$

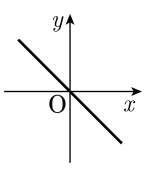


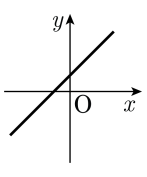
$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

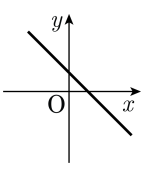
※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

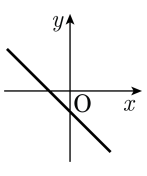
7. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가 ? (단, $x,\ y$는 실수)

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$(3+2i)(x+yi)=3x+3yi+2xi-2y$

$=(3x-2y)+(2x+3y)i$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\frac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

8. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$
$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+\sqrt{3}=2x,\ \sqrt{3}x-1=2$
$\therefore\ x=\sqrt{3}$

9. 실수 x, y 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$$

$$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$$

$$(x+y)-(x-y)i=4-2i$$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3$, $y=1$ $\therefore\ 2x+y=7$

10. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\
&= (1 + i)(1 - i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

11. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

12. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$
㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수
㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$
$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z\neq 0$ 이므로 $b\neq 0$)
㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수
㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우
$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.
㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

13. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b|c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$ ② $2b$ ③ $-2c$ ④ $-2a$ ⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b|>|c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$\therefore$ (준식) $= |a+b+c| - |a+b| - |c|$

$= -(a+b+c) + (a+b) - c$

$= -2c$

14. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$ 을 만족하고 $\alpha+\beta=i$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha+\beta=i$에서 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{i}$ $\therefore\ \overline{\alpha}+\overline{\beta}=-i$

$\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$에서 $\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta}=\frac{1}{\beta}$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ $\therefore\ \alpha\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=i^2-2\cdot(-1)=1$

15. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수z는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.
② 한 개 있다.
③ 두 개뿐이다.
④ 무수히 많이 있다.
⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore$ $2a-3b=1$을 만족하는 실수 a, b의 쌍은 무수히 많다.