1. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　　② 2개　　③ 3개　　④ 4개　　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,

$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

2. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$

④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$$x = 1+2i,\ y = \frac{1+2i}{1-i},\ z = \frac{1-2i}{1-i}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i\end{aligned}$$

3. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12 ⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

4. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

5. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

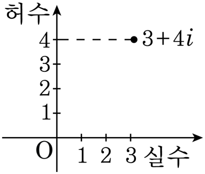
그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

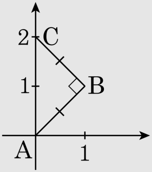
6. 복소수 $z=a+bi$ $(a,\ b$는 실수$)$를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, $0,\ z,\ z^2$ 이 나타내는 점을 각각 $A,\ B,\ C$ 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



① 정삼각형
② 이등변삼각형
③ 직각삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$

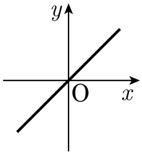


$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

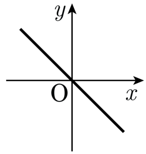
※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

7. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, $x,\ y$는 실수)

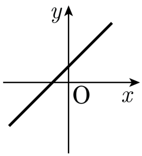
①



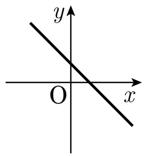
②



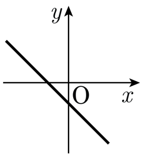
③



④



⑤



해설

$$(3+2i)(x+yi)=3x+3yi+2xi-2y$$
$$=(3x-2y)+(2x+3y)i$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$$\therefore\ y=-\frac{2}{3}x$$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

8. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

9. 실수 x, y 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$$

$$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$$

$(x+y)-(x-y)i=4-2i$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1\quad\therefore\ 2x+y=7$

10. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1　② 2　③ 4　④ 10　⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\
&= (1 + i)(1 - i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

11. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore\ z$는 3개다.

12. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.

㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.

㉤ $\dfrac{1}{z}$ 과 $\dfrac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\dfrac{1}{z}=c+di$ 라면 $\dfrac{1}{\bar{z}}=\overline{\dfrac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

13. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b|>|c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$ ② $2b$ ③ $-2c$ ④ $-2a$ ⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0$, $b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0$, $c \ge 0$

$|a+b|>|c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c<0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

14. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore \ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \dfrac{1}{\beta}$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \qquad \therefore \ \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$

15. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수 z는? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.

② 한 개 있다.

③ 두 개뿐이다.

④ 무수히 많이 있다.

⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면,

$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore$ $2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 쌍은 무수히 많다.