

1. 다음 식을 간단히 하면?

$$\begin{aligned} & {}^3\sqrt{-8} + \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{-8}\sqrt{-2} \\ & + \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned} & = {}^3\sqrt{(-2)^3} + \sqrt{4} + \sqrt{8}i \cdot \sqrt{2}i \\ & \quad + \frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i} + \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= -2 + 2 + \sqrt{8 \cdot 2}i^2 + \sqrt{\frac{16}{4}} - \frac{\sqrt{6}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$= -2 + 2 - 4 + 2$$

$$= -2$$

※ 참고

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{가 항상 성립하는 } a, b \text{의 부호를}$$

생각해 보자.

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6} \text{ 이 된다고 계산할 수도 있다.}$$

그러나 조심해야 할 것은 공식에서 주어지는 조건들이다.

즉, $a < 0, b < 0$ 일 때를 제외한 경우에만 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 가 성립한다.

$$\text{마찬가지로 } \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}} = \sqrt{-\frac{10}{5}} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \text{ 라고 함부로 계산해}$$

서는 안 된다.

$$\text{왜냐하면 } a > 0, b < 0 \text{ 일 때를 제외한 경우에만 } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 가}$$

성립하기 때문이다.

2. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i$, $b = 1$ 이면 $a + (b - 1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

3. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + 2i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k 의 값을 정하면?

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} z &= 3(k + 2i) - k(-2i) \\ &= 3k + (6 + 2k)i \Rightarrow \text{순허수} \\ \therefore 3k &= 0, k = 0 \end{aligned}$$

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$$

$$= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$(i) \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ 에서 } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$(ii) \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ 에서 } (x-1)(x-2) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1 \text{ 또는 } x \neq 2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

5. $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

$$\frac{a(1+i)}{2} + \frac{b(1-i)}{2} = 5$$

$$a(1+i) + b(1-i) = 10,$$

$$(a+b) + (a-b)i = 10$$

$$a+b = 10, a-b = 0$$

$$2a = 10, a = 5, b = 5, ab = 25$$

6. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉤ $\frac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉥ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉦ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠, ㉡

② ㉢, ㉤

③ ㉠, ㉤, ㉥

④ ㉤, ㉦

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉤ $\frac{4}{\sqrt{-4}} = \frac{4}{2i} = -2i$

㉥ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉦ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

7. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15

② 25

③ 35

④ 45

⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$

$$= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i$$

$$= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i$$

$$= a + bi$$

$$\text{따라서, } a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45$$

8. 복소수 $z = (1 + i)x^2 + x - (2 + i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1

② 1

③ 1

④ 2

⑤ 2

해설

복소수 z 를 $a + bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

$$\text{즉, } x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$$

한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로

$z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.

$$\therefore x = -1$$

9. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$

② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$

④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모) $\neq 0$ 이므로

$$(분자) = (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z\bar{z} = 1$$

10. 복소수 $a^2(1+i) + a(3+2i) + 2$ 를 제공하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

(준식) $= (a^2 + 3a + 2) + (a^2 + 2a)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2 + 3a + 2 = 0$

$a^2 + 2a \neq 0$ 이므로 $\therefore a = -1$

11. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$z = (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i$$

$$= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0

$$\therefore x = -2$$

12. $(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면($\alpha > \beta$) ?

① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$$(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$$

$$(-x^2 - 3ax + 5) + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

$$-x^2 - 3ax + 5 = 0 \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \cdots \text{㉢}$$

㉢을 인수분해하면,

$$(x-1)(x-2) = 0, \therefore x = 1, 2$$

㉠에 대입하면,

$$x = 1 \text{ 일 때, } -1 - 3a + 5 = 0, \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } -4 - 6a + 5 = 0, \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{1}{6} (\because \alpha > \beta)$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

13. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 300

② 303

③ 305

④ 308

⑤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개, $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$$

$$= a - b + \sqrt{2}i(c - d) = 0$$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a - b, c - d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b, c = d \cdots$ ①

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

$$= 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$$

$$= a + b - 2c - 2d = (a + b) - 2(c + d) = 0$$

$$a + b = 2(c + d)$$

$$2a = 4c (\because \text{①})$$

$$\therefore a = 2c$$

$$\therefore a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$$

$$\therefore n = a + b + c + d = 6a, n \text{ 은 } 6 \text{ 의 배수}$$

14. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\ &= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

15. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠ + ㉡ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\textcircled{㉠}\text{식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\text{이므로 허근을 가진다. } \therefore a \neq -\frac{3}{2}$$

ii) $x = -1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$