

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

2. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1} - \frac{x^2-x-3}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$ 에서 $A-B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x=2$, $x=-2$ 를 대입해서 정리하면

$x=2$ 일 때

$$\frac{4-6-1}{1} - \frac{4-2-3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A+B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A+B}{6}$$

$$\therefore 2A+B = -10 \cdots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 일 때

$$\frac{4+6-1}{-3} - \frac{4+2-3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A+B}{-6}$$

$$\therefore -2A+B = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=-2$

$$\therefore A-B = (-4) - (-2) = -2$$

3. 등식 $3x^2 + 5x = a(x-1)^2 + b(x+1) + c$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b-c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x &= a(x-1)^2 + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + (-2a+b)x + a+b+c \end{aligned}$$

$$a = 3, -2a + b = 5, a + b + c = 0$$

$$\therefore a = 3, b = 11, c = -14$$

$$\therefore a + b - c = 28$$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = a + b + c \cdots \textcircled{A}$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$8 = 2b + c \cdots \textcircled{B}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-2 = 4a + c \cdots \textcircled{C}$$

①, ②, ③을 연립하면

$$a = 3, b = 11, c = -14$$

$$\therefore a + b - c = 28$$

4. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?
- ① $x^2 - 3$ ② $x^2 + x - 2$ ③ $-x^2 - 1$
④ $-x^2 + x$ ⑤ $x - 1$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $a - b + c = -2 \cdots \textcircled{1}$
 $(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 에서 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 $x + x - x + 1 = -a + bx + c$
 $x + 1 = bx + c - a$
 $\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -1, b = 1, c = 0$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$
즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$
따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$
 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + x + 1 = (x^2 + 1)((x + 1)Q(x) + a) + x + 1$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$
 $\therefore a = -1$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

5. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때, $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$$x^2 = 2 \text{를 대입하면 } 4a + b = -16$$

$$x^4 = -1 \text{을 대입하면 } -a + b = -1$$

$$\therefore a = -3, b = -4$$

$$\therefore 2a - b = -2$$

6. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한
항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$

$\therefore 2ab = -6$

7. $f(x) = x^2 + a$ 에 대하여 $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다. 이 때, $f(0)$ 를 구하면? (단, $a \neq 0$)

① 2

② -2

③ 0

④ 1

⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 + a$ 에서 $f(x^2) = x^4 + a$

$f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로

$x^4 + a = (x^2 + a)Q(x)$

양변에 $x^2 = -a$ 를 대입하면

$a^2 + a = 0, a(a + 1) = 0$

$\therefore a = -1 (\because a \neq 0)$

$f(x) = x^2 - 1 \quad \therefore f(0) = -1$

8. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + a(x - 1)(x - 2) + b(x - 1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

9. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, \quad y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

10. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?
(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k = 0, 3a-2k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

11. $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B($b, 1$)라 할 때, AB의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

- (i) 준식을 k 에 관하여 정리하면
 $(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은
 $x^2 - 2x + 1 = 0, x - y - 1 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 0$
 $\therefore A(1, 0)$
(ii) A(1, 0), B($b, 1$)에서
 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
 $b^2 - 2b = 0, b(b-2) = 0 \quad \therefore b = 0, 2$
 $\therefore b$ 의 값들의 합은 2

12. k 의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k + 2)y - (k^2 - 4)z = 28$ 이 항상 성립하도록 x, y, z 의 값을 정할 때, $3x + y + z$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 k 에 대해 정리하면

$$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$$

$$\therefore 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$$

$z = 2x$, $y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$ 에 대입하면

$$x = 2, y = -6, z = 4$$

$$\therefore 3x + y + z = 4$$

13. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \text{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$ 의 일차항의 계수는?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)(x + a) + r \quad (a, r \text{ 는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 - x - a + r$$

$\therefore$ 일차항의 계수는 -1

15. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2 = x - 1$ 을 대입하면

$$ax + (b - 1) = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a = 0, b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

$$\therefore a + b = 1$$

해설

$$x^3 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 1)Q(x)$$

$$= (x^2 - x + 1)(x + b)$$

$$\therefore b = 1, a = 0$$

16. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

- ① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
- ② $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
- ③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- ⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때
 $(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로
 $a + b + c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

17. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m + n$ 의 값은?

- ① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$$

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) + 5 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q'(x) \text{ 으로 놓으면 } f(2) = 0$$

$$\text{따라서, } f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

18. 다항식 $f(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 6$ 이 일차식 $x - 2$ 로 나누어떨어질 때, $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x - 2)Q(x)$$

$$\text{즉, } f(2) = 8 - 12 + 2k - 6 = 0$$

$$\therefore k = 5$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

$$\therefore f(1) = -3$$

19. x^{100} 을 $x + 2$ 로 나눈 몫을 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{5}(1 - 2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1 - 2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1 - 2^{100})$
 ④ $\frac{1}{3}(1 - 2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x) = x^{100} = (x + 2)Q(x) + R$ 라 하면

$$f(-2) = 2^{100} = R$$

$$\therefore R = 2^{100}$$

$$f(1) = 3Q(1) + R$$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{3}(1 - R) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

(ii) $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{99}x^{99}$

$$\therefore Q(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{99}$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_{99} = Q(1) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

20. 다항식 $x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 을 $x + 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① -33 ② -22 ③ -11 ④ 11 ⑤ 33

해설

$f(x) = x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 이라 하면,
 $f(x) = (x + 1)Q(x) + R$ 에서 $f(-1) = R$ 이므로
 $f(-1) = (-1)^{22} + (-1)^{11} - 22 + 11 = -11$

21. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

22. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

23. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0

② 1
- ③ r_1

④ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$
- ⑤ $r_1r_2 \cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
 &= (x-1)^2f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^3f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
 &\vdots \\
 &= (x-1)^nf_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots \\
 &\qquad + r_2(x-1) + r_1 \\
 R(x) &= r_n(x-1)^{n-1} + \cdots + r_2(x-1) + r_1 \\
 \therefore R(2) &= r_n + r_{n-1} + \cdots + r_2 + r_1
 \end{aligned}$$

24. 다항식 x^6 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, $Q(x)$

를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나눌 때의 나머지는?

- ① $\frac{1}{64}$
- ② $-\frac{1}{32}$
- ③ $\frac{3}{32}$
- ④ $-\frac{3}{16}$
- ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면

$R = a^6$

$x^6 = (x - a)Q(x) + a^6$ 에서

$Q(x) = \frac{x^6 - a^6}{x - a}$

$= x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$

$Q(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 나머지는 $Q(a)$ 의 값과 같으므로 $Q(a) = 6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{3}{16}$

25. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가 $4x+3$ 일 때 $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x + 3$$

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(2) = 11$$

$f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$f(2x) = (x-1)Q'(x) + R$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(2) = R$$

$$\therefore R = 11$$

26. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \\ (x^2-x+3)f(x) &= (x+1)Q(x) + R \\ x &= -1 \text{ 대입} \\ \therefore R &= 5f(-1) = 5 \times 2 = 10 \end{aligned}$$

27. 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눈 나머지가 $2x + 1$ 이다. $2f(x) + 3g(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1)Q_1(x) + 2, \\ \therefore f(1) &= 2 \\ g(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q_2(x) + 2x + 1, \\ \therefore g(1) &= 3 \\ 2f(x) + 3g(x) &\text{를 } x - 1 \text{로 나눈 나머지는} \\ 2f(1) + 3g(1) &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \end{aligned}$$

28. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)+3$ 을 $x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x), R$

② $Q(x), R+3$

③ $xQ(x), R$

④ $xQ(x), R+3$

⑤ $xQ(x)+R, R+3$

해설

$$f(x) = (x-1)Q(x) + R$$

$$\begin{aligned}xf(x) + 3 &= (x-1)xQ(x) + Rx + 3 \\&= (x-1)xQ(x) + R(x-1) + R + 3 \\&= (x-1)\{xQ(x) + R\} + R + 3\end{aligned}$$

$$\therefore \text{몫} : xQ(x) + R, \text{나머지} : R + 3$$

29. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

(우변) = $\{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$
= $\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$
= $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3$
+ $\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$
= $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)$

$g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$

$\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$

30. $ax^2 - (2a + c)x - 1 = (b - 2)x^2 - c$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

양변의 계수를 비교하면

$$a = b - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2a + c = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$1 = c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

31. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1, P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?
- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$
 $P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로
 $a(x^2 + 1)^2 + b(x^2 + 1) = (ax^2 + bx)^2 + 1$
 $ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = a^2, 2ab = 0, 2a + b = b^2, a + b = 1$
 $a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데
이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$
즉, $P(x) = x$ 뿐이다.
 $\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.
 $P(1) = 1 (\because \text{모든 계수의 합은 } x = 1 \text{ 대입})$

32. x 에 대한 항등식 $ax^2 - 5x + c = 2x^2 + bx - 1$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -5$

▷ 정답 : $c = -1$

해설

계수비교법에 의하여 동차의 계수가 같아야 한다.

$\therefore a = 2, b = -5, c = -1$

33. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots ①$$

$$2x - y + z = 5 \cdots ②$$

$$① + ②: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$② \times 2 - ①: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, 4c + 6b = 0, 9b + 4c = 6$$

$$\text{위의 식을 연립하여 풀면, } a = 1, b = 2, c = -3$$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

34. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\frac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$ 라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y 에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0, a+k=0, -b+k=0$

$\therefore k=2, a=-2, b=2$

$\therefore a-b=-4$

35. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = 2$
- ② $a = 2, b = 2$
- ③ $a = 2, b = 0$
- ④ $a = 0, b = 2$
- ⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면
 $(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$
이 식을 x, y 에 대하여 정리하면
 $(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$
이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로
 $a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

36. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x+y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \textcircled{1}, a^2 - b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

37. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

38. x 에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

39. $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)^3 + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ 가 항등식일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

-1	1	-1	0	2
		-1	2	-2
-1	1	-2	2	0
		-1	3	
-1	1	-3	5	
		-1		
	1	-4		

$\therefore a = -4, b = 5, c = 0$

$\therefore a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore a + b + c = 1$

40. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한
항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

- ① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상
성립한다.
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면
 $2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

41. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$

$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$2(a+b) = 6, a+b = 3$

42. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

x^3 의 계수가 1이므로
 $f(x) = (x^2 + 2)(x + \alpha) + x + 5 \cdots \textcircled{1}$
 $x-1$ 의 인수를 가지므로, $f(1) = 0$
 $\textcircled{1}$ 에 넣어 계산하면,
 $f(1) = 3(1 + \alpha) + 6 = 0, \alpha = -3$
 $\therefore f(2) = (2^2 + 2)(2 - 3) + 2 + 5 = 1$

43. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1$, $x = 2$ 를 각각 대입하면,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면,

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

44. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ 를 일차식 $x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -10 ② 10 ③ -4 ④ 4 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x + 1)Q(x) + R$ 이라고 놓으면

$f(-1) = R$

$\therefore f(-1) = -1 - 2 - 3 - 4 = -10$

따라서 $R = -10$

45. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
 $f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0
② a_0
③ a_1
④ a_5
⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
 $\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
 $f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

46. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+3)(x-6)$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$ 이었다.
 $f(x)$ 를 $(x+3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$$f(x) = (x+3)(x-6)Q(x) + x-2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = -5$$

47. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ 을 만족한다. $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나누었을 때 나머지는?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 2

해설

$$f(1) = 1 + a + b + c = 2$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$$

세 식을 연립하면,

$$a = -6, b = 13, c = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$$

$$\therefore f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$$

48. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 7$ 을 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + 7$$

$$f(x) = (x + 2)Q(x) + 5$$

$$\therefore f(-2) = 5$$

$$f(-2) = 16 - 12 - 2a + 7 = 5$$

$$\therefore a = 3$$

49. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

- ① 8 ② -8 ③ 12 ④ -12 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1} \\ &= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2} \\ &= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

나머지 정리에 의해

i) ①에서 $f(a) = a+2$, ③에서

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Rightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

ii) ①에서 $f(-b) = -b+2$, ②에서

$$\begin{aligned} f(-b) &= b+4 \\ \Rightarrow b &= -1 \end{aligned}$$

iii) ②에서 $f(c) = -c+4$, ③에서

$$\begin{aligned} f(c) &= 0 \\ \Rightarrow c &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore abc = 8$$

50. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$
 $(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax+b$
 $x=1, x=-1$ 을 대입한다.
 $4f(1) = 12 = a+b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2f(-1) = -2 = -a+b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면,
 $a=7, b=5$
 $\therefore$ 나머지 $R(x) = 7x+5$
 $R(1) = 12$

51. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$$w^2 + w + 1 = 0, \text{ 양변에 } (w - 1) \text{ 을 곱하면}$$

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지= 3

52. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2+3x+2 로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+5$

② $-3x$

③ $3x+6$

④ $4x+7$

⑤ $5x+8$

해설

다항식 $f(x)$ 를 x^2+3x+2 , 즉 $(x+1)(x+2)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$f(x) = (x+1)(x+2)Q(x) + ax+b$ 로 놓을 수 있다.

문제의 조건에서 $f(-1) = 3$, $f(-2) = -1$ 이므로

$$f(-1) = -a + b = 3$$

$$f(-2) = -2a + b = -1$$

이것을 풀면 $a = 4$, $b = 7$

따라서, 구하는 나머지는 $4x+7$

53. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때, $f(1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x) = (x - \alpha)Q(x) - 2 \cdots \textcircled{1} \\ xf(x) = (x - \alpha)Q'(x) - 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times x = \textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x - \alpha)Q(x) - 2x \\ &= (x - \alpha)Q(x) - 2(x - \alpha) - 2\alpha \\ &= (x - \alpha)\{Q(x) - 2\} - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore -2\alpha = -2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)Q(x) - 2$$

$$\therefore f(1) = -2$$

해설

$f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어지므로

$$f(\alpha) + 2 = 0 \therefore f(\alpha) = -2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha f(\alpha) + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $\alpha = 1$

$$\therefore f(1) = f(\alpha) = -2(\because \textcircled{1})$$

54. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $ax + b(a \neq 0)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \quad \therefore R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$g(x) = xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지는

$$g\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}R$$

55. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

56. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

57. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ 3^{2n}

해설

$$\begin{aligned}x^n(x^2 + ax + b) &= (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2) \\x^n(x^2 + ax + b) &= x^n(x-2)(x+\alpha) \text{이라 하면} \\x^n(x-2)(x+\alpha) &= (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\} \\\therefore x^n(x+\alpha) &= (x-2)Q(x) + 2^n \\\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면} \\2^n(2+\alpha) &= 2^n \\2+\alpha &= 1 \\\therefore \alpha &= -1 \\x^2 + ax + b &= (x-1)(x-2) \\\therefore a &= -3, b = 2 \\f(x) &= x^n(x^2 - 3x + 2) \text{이므로} \\f(3) &= 3^n(9 - 9 + 2) \\&= 2 \times 3^n\end{aligned}$$

58. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

① -1

② 2

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가

u, v 에 대한 항등식이므로

$u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.

$\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 1$ 이므로 $f(0) = 2$

또, $u = v = 1$ 일 때는

$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$

$\therefore f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$

$= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$

$= -2$

59. 임의의 x 에 대하여 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 합 $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입 하면
 $-1 = a + b + c + d$
 $\therefore a + b + c + d = -1$

해설

$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
 $= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$
 $= (x+1)[(x+1)\{a(x+1) + b\} + c] + d$ 이므로
 $x^3 - 1$ 을 $x + 1$ 로 연속으로 나눌 때
차례대로 나오는 나머지가 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	-2	← d
		-1	2		
-1	1	-2	3	← c	
		-1			
	1	-3	← b		
	↑				
	a				

60. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

61. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$
- ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$
- ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
- ④ $2(3^{30}+1)$
- ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
 $x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \textcircled{1}$
이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29차의 다항식이므로
 $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은
 $x=1$ 을 대입한
 $Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29}$ 과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R| \cdots \textcircled{2}$
한편 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $|Q(1)-R| = \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2}$
 $= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)$

62. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$
 $x = -1$ 을 양변에 대입하면 $R = -1$
 $\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$
 $\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $3 = 2Q(1) - 1$
 $\therefore Q(1) = 2$

63. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

64. 다항식 $4x^3 + 6x^2 - 12x - 11$ 을 $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하고 다항식 $Q(-2x + 3)$ 을 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 r 이라 할 때, $R + r$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$4x^3 + 6x^2 - 12x - 11 = (x + 2)Q(x) + R$
 $x = -2$ 을 대입하면 $R = 5$
 $4x^3 + 6x^2 - 12x - 11 = (x + 2)Q(x) + 5 \cdots \text{㉠}$
 $Q(-2x + 3) = (x - 1)Q'(x) + r$
 $x = 1$ 을 대입하면 $r = Q(1)$
㉠에 $x = 1$ 을 대입하면,
 $4 + 6 - 12 - 11 = 3Q(1) + 5$ 에서 $Q(1) = r = -6$
 $\therefore R + r = 5 + (-6) = -1$