

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

2. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때, $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$$x^2 = 2 \text{를 대입하면 } 4a + b = -16$$

$$x^4 = -1 \text{을 대입하면 } -a + b = -1$$

$$\therefore a = -3, b = -4$$

$$\therefore 2a - b = -2$$

3. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

4. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, \quad y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

5. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때, $m + n$ 의 값은?

- ① $-\frac{19}{3}$ ② $-\frac{25}{6}$ ③ $-\frac{29}{6}$ ④ $-\frac{14}{3}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$$

$$f(x) = (x + 1)Q(x) + 5 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q'(x) \text{ 으로 놓으면 } f(2) = 0$$

$$\text{따라서, } f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가 $4x+3$ 일 때 $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x + 3$$

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(2) = 11$$

$f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$f(2x) = (x-1)Q'(x) + R$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(2) = R$$

$$\therefore R = 11$$

9. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

(우변) = $\{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$
= $\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$
= $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3$
+ $\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$
= $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)$
 $g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
 $-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$
 $\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$

10. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x - y + z = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

11. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

12. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$

$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$2(a+b) = 6, a+b = 3$

13. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
 $f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0
② a_0
③ a_1
④ a_5
⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
 $\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
 $f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

14. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

- ① 8 ② -8 ③ 12 ④ -12 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1} \\ &= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2} \\ &= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

나머지 정리에 의해

i) ①에서 $f(a) = a+2$, ③에서

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Rightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

ii) ①에서 $f(-b) = -b+2$, ②에서

$$\begin{aligned} f(-b) &= b+4 \\ \Rightarrow b &= -1 \end{aligned}$$

iii) ②에서 $f(c) = -c+4$, ③에서

$$\begin{aligned} f(c) &= 0 \\ \Rightarrow c &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore abc = 8$$

15. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때, $f(1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x) = (x - \alpha)Q(x) - 2 \cdots \textcircled{1} \\ xf(x) = (x - \alpha)Q'(x) - 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times x = \textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x - \alpha)Q(x) - 2x \\ &= (x - \alpha)Q(x) - 2(x - \alpha) - 2\alpha \\ &= (x - \alpha)\{Q(x) - 2\} - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore -2\alpha = -2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)Q(x) - 2$$

$$\therefore f(1) = -2$$

해설

$f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어지므로

$$f(\alpha) + 2 = 0 \therefore f(\alpha) = -2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha f(\alpha) + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $\alpha = 1$

$$\therefore f(1) = f(\alpha) = -2(\because \textcircled{1})$$

16. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

- ① 4
- ② 14
- ③ 24
- ④ 34
- ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(2) = A + B + C + D$ 이므로
 $f(2)$ 를 구하기 위해서는
 $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,
 $f(t) = A(t - 1)^3 + B(t - 1)^2 + C(t - 1) + D$

1	3	0	-1	2
		3	3	2

1	3	3	2	4
		3	6	

1	3	6	8
		3	
3		9	

 $\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$
 $\therefore A + B + C + D = 24$

17. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ 3^{2n}

해설

$$\begin{aligned}x^n(x^2 + ax + b) &= (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2) \\x^n(x^2 + ax + b) &= x^n(x-2)(x+\alpha) \text{이라 하면} \\x^n(x-2)(x+\alpha) &= (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\} \\\therefore x^n(x+\alpha) &= (x-2)Q(x) + 2^n \\\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면} \\2^n(2+\alpha) &= 2^n \\2+\alpha &= 1 \\\therefore \alpha &= -1 \\x^2 + ax + b &= (x-1)(x-2) \\\therefore a &= -3, b = 2 \\f(x) &= x^n(x^2 - 3x + 2) \text{이므로} \\f(3) &= 3^n(9 - 9 + 2) \\&= 2 \times 3^n\end{aligned}$$

18. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$
- ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$
- ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
- ④ $2(3^{30}+1)$
- ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
 $x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \textcircled{1}$
이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29차의 다항식이므로
 $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은
 $x=1$ 을 대입한
 $Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29}$ 과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R| \cdots \textcircled{2}$
한편 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $|Q(1)-R| = \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2}$
 $= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)$

19. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

- ① $af(a) + bf(b)$ ② $-af(a) + bf(b)$
 ③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$ ④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$
 ⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$$\begin{aligned}
 R(x) &= cx + d \text{라 하면} \\
 f(a) &= ac + d, f(b) = bc + d \\
 \therefore f(a) - f(b) &= (a - b)c \\
 \therefore c &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \\
 \text{또 } f(a) + f(b) &= (a + b)c + 2d \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d \\
 \therefore 2d &= f(a) + f(b) - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{(a - b) \{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + \\
 &\quad bf(a) - bf(b)\}] \\
 &= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - \\
 &\quad bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b} \\
 \therefore d &= \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 \text{따라서 } R(a + b) &= (a + b)c + d \\
 &= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}
 \end{aligned}$$

20. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$