

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

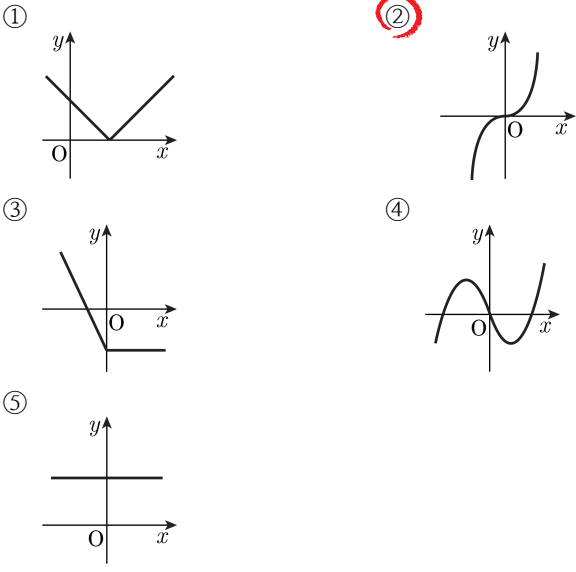
2. 세 함수 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = |x + 5|$ 에 대하여 $(h \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(2) = -8 \text{ 이므로} \\(h \circ g \circ f)(1) &= (h \circ (g \circ f))(1) \\&= h((g \circ f)(1)) = h(-8) = |-8 + 5| \\&= 3\end{aligned}$$

3. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?



해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

4. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$

여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$

따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로

$ab = 1$

5. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$

$\therefore a = -3$

6. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$

$x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

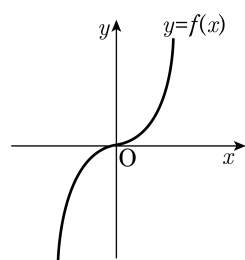
$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

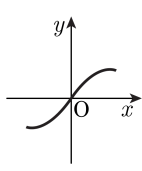
$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

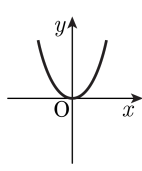
7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은
무엇인가?



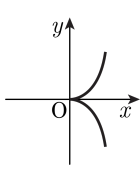
①



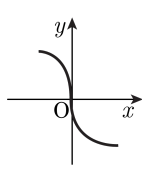
②



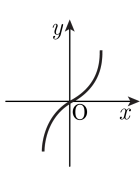
③



④



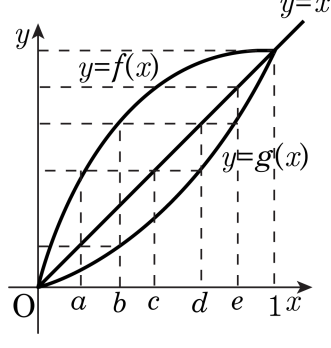
⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

8. 집합 $A = \{x|0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은 얼마인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$ 를 이용하여 함숫값을 구한다.
 $f^{-1}(d) = x$ 라 하면,
 $f(x) = d \quad \therefore x = b$
 $\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
 $= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
 $= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

9. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3, (f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$2m + n = 3 \cdots \textcircled{㉠}$

$3m + n = 7 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$\therefore m + n = -1$

10. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$$

$$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

11. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ 일 때 $f(1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b\end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = 4x + 3$$

x 에 대한 항등식 이므로 $a^2 = 4, ab + b = 3$

$a > 0$ 이므로 $a = 2, b = 1$

$$\therefore f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore f(1) = 3$$

12. 분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x)) = x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

- ① -1 ② 0 ③ -1, 0
④ 0, 1 ⑤ -1, 0, 1

해설

분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에서

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x-1)} = x$$

즉, $x = x^3$ 에서 $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore x = -1, 0, 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 -1, 0

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \text{가 짝수일 때}) \\ -x+5 & (x \text{가 홀수일 때}) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f)(3)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(-3+5) \\ &= f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

14. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

15. 함수 $f(x)$ 가 $f(3x+1) = 2x-1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = \frac{x-1}{2}$ ② $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ ③ $f(x) = \frac{x-2}{3}$

④ $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x) = \frac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1) = 2x-1$ 에서 $3x+1 = t$ 라고 놓으면 $x = \frac{t-1}{3}$ 이므로

$$\therefore f(t) = 2 \cdot \frac{t-1}{3} - 1 = \frac{2t-5}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x-5}{3}$$

16. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

17. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

18. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$

㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$

㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.

㉡ $y = |x - 2|$ 에서 $y = 1$ 이면
 $x = -1, 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
 $x = \pm 2$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.

㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.

이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.

㉤ $x_1 \neq x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

㉥ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

19. 함수 $f(x) = ax + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$f(3) = -2 \quad \therefore 3a + b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프도

점 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$f^{-1}(3) = -2 \quad \therefore f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -1, b = 1$

$$\therefore a + b = 0$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a = -\frac{3}{2}$

② $a = -\frac{5}{2}$

③ $a = -\frac{7}{2}$

④ $a = -\frac{9}{2}$

⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

21. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \sqrt{4x+1}$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(5)$ 의 값은? (단, g^{-1} 는 g 의 역함수이다.)

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

$g^{-1}(5) = a$ 라 하면

$g^{-1}(5) = a \Leftrightarrow g(a) = 5$ 이므로

$\sqrt{4a+1} = 5$ 에서 $a = 6$

$(f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5)) = f(6) = 3 \times 6 - 1 = 17$

22. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2 + 3) = f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{-1}(2) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 2$$

그런데 $x+5 \geq 5$ ($\because x \geq 0$) 이고

$$-x^2+3 < 3 \text{ ($\because x < 0$) 이므로 } -t^2+3 = 2$$

$$\therefore t = f^{-1}(2) = -1 \text{ ($\because t < 0$)} \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$$

23. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$, $f^{-1}(6) = 2$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 이므로

$$a + b = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$f^{-1}(6) = 2$ 에서 $f(2) = 6$ 이므로

$$2a + b = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8$$

24. 함수 $y = \sqrt{a-2x} + 1$ 의 역함수가 점(5, -2) 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

해설

역함수가 점 (5, -2) 를 지나므로
원함수는 점 (-2, 5) 를 지나게 된다.
따라서 $5 = \sqrt{a+4} + 1$
 $\therefore a = 12$

25. 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(-1) = 3$, $f^{-1}(15) = 2$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라? (단, a, b 는 상수이고 f^{-1} 는 f 의 역함수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 11$

해설

$f^{-1}(15) = 2$ 에서 $f(2) = 15$ 이므로

$f(2) = 2a + b = 15$

$f(-1) = -a + b = 3$ 연립하여 풀면 $a = 4$, $b = 7$

$\therefore a + b = 11$

26. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x ② $x + 1$ ③ $x + 2$ ④ $x + 3$ ⑤ $x + 4$

해설

$$\begin{aligned} h &= g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서} \\ h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \\ (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x))) \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = \\ g^{-1}(g(x)) &= x \end{aligned}$$

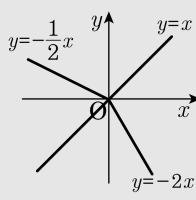
27. 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x & (x \geq 0) \\ ax & (x < 0) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f^{-1}(x) = f(x)$

를 만족할 때, 상수 a 의 값은? (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

- ① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$f^{-1}(x) = f(x)$ 이려면 $y = f(x)$ 의 그래프
는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.
직선 $y = x$ 에 대하여 직선 $y = -2x$ 와 대
칭인 직선의 방정식은 $x = -2y$
즉, $y = -\frac{1}{2}x$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.

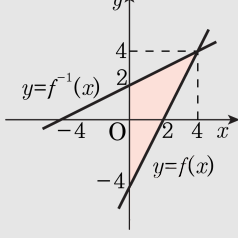


28. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 14

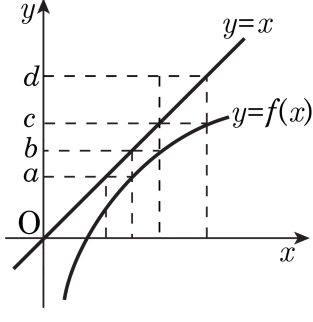
해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의
그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기
위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
 $\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

29. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

30. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$	㉡ $f(x) = -x - 1$
㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

31. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60
- ② 55
- ③ 51
- ④ 48
- ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이므로

$$2a = 2a^2, 3a = 4ab + 3a, a + b = 2b^2 + 3b + 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0 (\because a \neq 0)$

즉, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

32. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

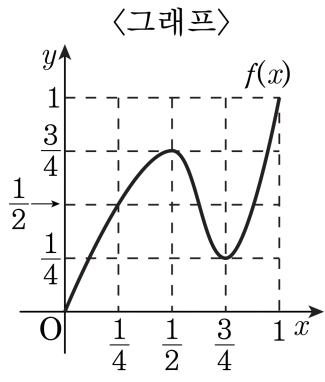
$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$2x-1 = 3t$ 이므로 $x = \frac{3t+1}{2}$

$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$

$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$

33. $R = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 이라 할 때, R 에서 R 로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : f$ 개수 n 개)



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

- ① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

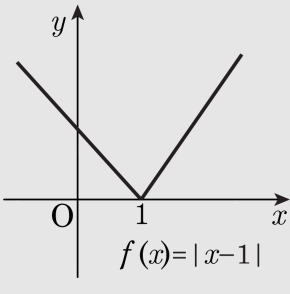
그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, ... 이므로
 $f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)
 $\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

34. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

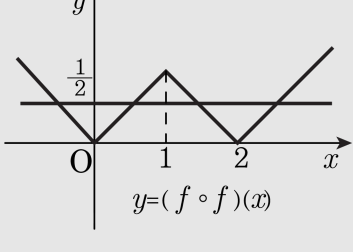
- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

35. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히

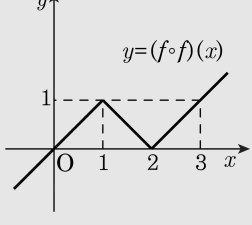
많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는

$y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $ab =$

-2



36. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 를 $f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a$ 와 같이 정의한다. 함수 f 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 2$
④ $-\frac{1}{2} < a < 2$ ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응으려면 $x \geq 1$ 에서 증가함수이므로 $x < 1$ 에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2-2a > 0$ 에서 $a < 1$

37. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$

$= g(f(x + 4))$

$= g((x + 4) + 4)$

$= g(x + 8)$

$= -2(x + 8) + 3 = -2x - 13$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$

$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$

$\therefore a = -9$

$\therefore h^{-1}(5) = -9$

38. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{그러므로 } f^{-1}(k) = -4$$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \text{ } (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

39. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재

재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

40. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
 $\therefore f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$

