1. 다음 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+2| \le 12$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 h 의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$p : 2-h \le x \le 2+h,\ \ q : -14 \le x \le 10$

$-14 \le 2-h \quad \rightarrow \quad h \le 16$

$2+h \le 10 \quad \rightarrow \quad h \le 8$

2. 두 조건 $p : |x-h| \le 1, q : -3 \le x \le 6$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 정수 h의 개수는?

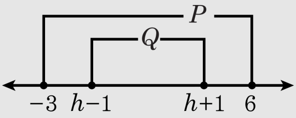
① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$P = \{x \mid h-1 \le x \le h+1\}$

$Q = \{x \mid -3 \le x \le 6\}$

$p \to q$(참) $\Rightarrow P \subset Q$



$-3 \le h-1, \quad h+1 \le 6$

$\therefore -2 \le h \le 5$

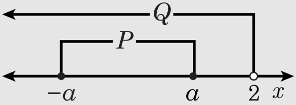
따라서 정수 h의 개수는 8개이다.

3. $|x| \le a$가 $2x-5 < x-3$이 되기 위한 충분조건이 되도록 실수 a의 범위를 정하면?

① $a < 2$ ② $a > 2$ ③ $a \le 2$ ④ $a < 1$ ⑤ $a > 4$

해설

$P = \{x \mid -a \le x \le a\}$, $Q = \{x \mid 2x-5 < x-3\} = \{x \mid x < 2\}$ 에서 $P \subset Q$ 가 되도록 a 값의 범위를 결정한다. P, Q 를 문제의 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



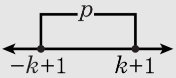
(주의 : $a \ne 2 \because P \subset Q$)$\therefore a < 2$

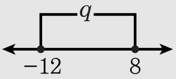
4. 두 조건 $p:\ |x-1| \le k$, $q:\ |x+2| \le 10$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 상수 k 의 최댓값은? (단, $k \ge 0$ 이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$p : |x-1| \le k \ \Rightarrow -k \le x-1 \le k$$
$$\Rightarrow -k+1 \le x \le k+1$$
$$q : |x+2| \le 10 \Rightarrow -10 \le x+2 \le 10$$
$$\Rightarrow -12 \le x \le 8$$





$p \subset q$ 이므로 $-k+1 \ge -12, k+1 \le 8$

$\therefore k$ 의 최댓값 : 7

5. 실수 x에 대하여 $|x-1|<a$ 가 $-2<x<6$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$|x-1|<a \rightarrow -a+1<x<a+1$, $-a+1<x<a+1$이 $-2<x<6$ 범위 안에 포함되어야 한다.

$-2 \leq -a+1 \rightarrow a \leq 3$, $a+1 \leq 6 \rightarrow a \leq 5$ $\therefore\ a \leq 3$

6. $|x-3| \le 7$ 은 $|x-2| \le a$ 이기 위한 필요조건이고 $x \le b$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?(단, $b > 0$)

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

$|x-3| \le 7$ 을 만족하는 집합을 P,
$|x-2| \le a$ 을 만족하는 집합을 Q,
$x \le b$ 를 만족하는 집합을 R 이라 하면,
$P \subset R$ 이므로 $Q \subset P$
즉 $Q \subset P \subset R$ 이다.
따라서 Q 는 $-a \le x-2 \le a$ 에서
$2-a \le x \le a+2$, P 는 $-4 \le x \le 10$,
R 은 $x \le b$ 이므로
$2-a \ge -4$, $a+2 \le 10$ 이므로
$a \le 6$, $a \le 8$ 에서 $a \le 6$ 이므로
a 의 최댓값은 6,
또한 $b \le 10$ 이므로 b 의 최솟값은 10
따라서 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은 16

7. $x < 2$ 는 $x \le a$ 이기 위한 필요조건, $x > b$ 는 $x > 6$ 이기 위한 충분조건이 되도록 정수 a, b 를 정할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

필요조건, 즉 $x \le a$ 가 $x < 2$ 에 포함되어야 하므로 a 의 최댓값은 1 이고 $x > b$ 는 $x > 6$ 에 포함되어야 하므로 b 의 최솟값은 6 이다.

$\therefore\ 1 + 6 = 7$

8. 세 집합 $A=\{x|-3\le x\le 6\}$, $B=\{x\mid x\le a\}$, $C=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2}\le x\le b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M, b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M-n^2$ 의 값은?

① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

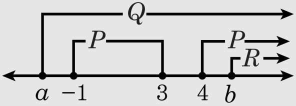
ⅰ) $C\subset A$ 조건에 만족하려면 $b\le 6$
$\therefore b$ 의 최댓값, $n=6$
ⅱ) $A\subset B$ 조건에 만족하려면 $a\ge 6$
$\therefore a$ 의 최솟값, $M=6 \Rightarrow 2M-n^2=-24$

9. $-1 \le x \le 3$ 또는 $x \ge 4$이기 위한 필요조건은 $x \ge a$ 이고, 충분조건은 $x \ge b$일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$P = \{x|\ -1 \le x \le 3\ or\ \ x \ge 4\}$, $Q = \{x|\ x \ge a\}$, $R = \{x|\ x \ge b\}$
이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$a \le -1,\quad b \ge 4$

$\therefore -1 + 4 = 3$

10. 두 조건 $p : a-4 < x \le a+5$, $q : |x| \le 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 q : $-1 \le x \le 1$ 에서 $a+5 \ge 1$, $a-4 < -1$

따라서 $a \ge -4$, $a < 3$ 이다.

즉, $-4 \le a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

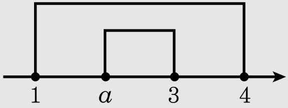
11. $a \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \le x \le b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $0 \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \le a \le 3$

따라서, a 의 최솟값은 1 이다.



(ii) $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \le x \le b$ 이므로 다음 그림에서 $b \ge 4$

따라서, b 의 최솟값은 4이다.

(i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

12. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$

② $1 \le a \le 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$

④ $a \le 1$ 또는 $a \ge 2$

⑤ $a > 0$

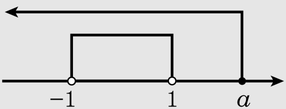
해설

$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \le a\}$

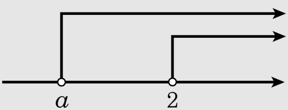
$\therefore a \ge 1 \cdots$ ㉠



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$

$\therefore a \le 2 \cdots$ ㉡



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \le a \le 2$

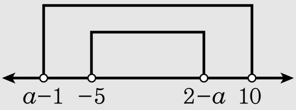
13. 다음 두 조건 $p : a-1 < x \leq 10$, $q : -5 < x \leq 2-a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

$\{x \mid -5 < x < 2-a\} \subset \{x \mid a-1 < x < 10\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$a-1 \leq -5$, $2-a \leq 10$

$\therefore\ -8 \leq a \leq -4$