

1. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$

④ $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

2. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 할 때 $|\alpha - \beta|$ 는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\frac{\sqrt{D}}{a}$

② $\frac{-\sqrt{D}}{a}$

③ $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$

⑤ $-\frac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ (단, } D = b^2 - 4ac \text{)}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha - \beta| &= \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \end{aligned}$$

3. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

- ① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 2 \quad \alpha\beta = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7$$

4. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$

② $x = \sqrt{2}$

③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$

⑤ $x = 6$

해설

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

5. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
(2) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = 0$

- ① (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\frac{3 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\frac{1 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4 \pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
 $\therefore 5x^2 - 8x + 4 = 0$
 $\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{5} = \frac{4 \pm 2i}{5}$
(2) $x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

6. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + (2k+1)x + 6 = 0$ 의 해가 2, α 일 때, $k + \alpha$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 2, α 라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$$

$$4k + 4k + 8 = 0 \text{에서 } k = -1$$

$k = -1$ 을 방정식에 대입하고 α 를 구한다.

$$-x^2 - x + 6 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0, x = 2, -3$$

$$\therefore k = -1, \alpha = -3$$

$$\therefore k + \alpha = -4$$

7. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, \quad -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

8. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1

② $\pm \sqrt{2}$

③ ± 2

④ $\pm \sqrt{3}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면

판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, \quad a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

9. 다음 보기는 방정식 $(ax - 1)a = x - 1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 해가 없다.
- ㉡ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.
- ㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax - 1)a = x - 1$ 에서
 $(a^2 - 1)x = a - 1$
 $(a - 1)(a + 1)x = a - 1$
㉠ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.
㉡ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.
㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 1}$
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

10. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (1+3i)x - 2(1+i) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(1+3i)x - 2(1+i)(1+i) = 0$$

$$2x^2 + (4i-2)x - 2(2i) = 0$$

$$x^2 + (2i-1)x - 2i = 0$$

$$(x+2i)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2i \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (-2i)^2 + 1^2 = -3$$

11. $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 2x + 2 = 0$

② $x^2 + 2x + 2 = 0$

③ $x^2 + 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - x + 2 = 0$

⑤ $x^2 + x + 2 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1)x + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

그런데, $\textcircled{\text{㉠}}$ 으로부터 $\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 = -1$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1 = 2$$

이것을 $\textcircled{\text{㉡}}$ 에 대입하면 $x^2 + x + 2 = 0$

12. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한근이 ω 일 때 $x=\frac{2}{\omega+1}$ 가 $x^2+px+q=0$ 의 근이다. 이 때, 유리수 p, q 의 합을 바르게 구한 것은?

- ① -2
- ② 0
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

$$x^2+x+1=0 \text{의 두 근 : } \omega, \bar{\omega}$$
$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\cdot\bar{\omega}=1$$
$$x^2+px+q=0 \text{의 두 근 : } \frac{2}{\omega+1}, \frac{2}{\bar{\omega}+1}$$
$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\bar{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\bar{\omega})+4}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1}=2$$
$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\bar{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1}=4$$
$$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$$

해설

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega \text{라 하자.}$$
$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$
$$\therefore \text{ 다른 한근은 켈레복소수인 } 1+\sqrt{3}i \text{가 된다.}$$
$$p=-(\text{두근의 합})=-2, q=(\text{두근의 곱})=4$$
$$p+q=2$$

13. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

㉠ $\frac{2}{9}$

㉡ $\frac{1}{3}$

㉢ $\frac{4}{9}$

㉣ $\frac{5}{9}$

㉤ $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$$

x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1-4a)y^2 - 2y + 9$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

- ① $a = 3, b = -2$
- ② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$
- ③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$
- ④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$
- ⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = -a \cdots \cdots$ ①
 $\alpha\beta = b \cdots \cdots$ ②
 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이므로
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots$ ③
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots$ ④
③에서 $\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$
 $\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$
④에서 $\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$
 $\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$
 $\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$

15. x 에 관한 방정식 $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$ 에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m 의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

- ① ab ② $\frac{a+b}{a-b}$ ③ $\frac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$$\begin{aligned}(m+1)(x^2 - bx) &= (m-1)(ax - c) \\ mx^2 - bmx + x^2 - bx &= amx - cm - ax + c \\ (m+1)x^2 + (a-b-am-bm)x + cm - c &= 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라고 하면,} \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \therefore \frac{a-b-am-bm}{m+1} &= 0, \quad am+bm = a-b \\ m(a+b) &= a-b, \quad a \neq -b \text{이므로 } a+b \neq 0 \\ \therefore m &= \frac{a-b}{a+b}\end{aligned}$$