1. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$　② $x = 1 \pm \sqrt{15}$　③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$

④ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$　⑤ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

3. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$$

4. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$　② $x = \sqrt{2}$　③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$　⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

5. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$ (2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

② (1) $\dfrac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

③ (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$

④ (1) $\dfrac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

⑤ (1) $\dfrac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

$$(2)\ x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$$

6. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k\cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$

$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$

$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$

$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$

$\therefore\ k+\alpha=-4$

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$$

$$\therefore a=1,\ b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

8. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1　　② $\pm\sqrt{2}$　　③ ± 2　　④ $\pm\sqrt{3}$　　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$$

$$4-2a^2=0,\ a^2=2$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{2}$$

9. 다음 보기는 방정식 $(ax-1)a = x-1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $a = -1$ 이면 해가 없다.

ㄴ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.

ㄷ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$(ax-1)a = x-1$ 에서

$(a^2-1)x = a-1$

$(a-1)(a+1)x = a-1$

ㄱ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.

ㄴ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ㄷ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \dfrac{1}{a+1}$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

10. 이차방정식 $(1-i)x^2+(1+3i)x-2(1+i)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(1+3i)x-2(1+i)(1+i)=0$

$2x^2+(4i-2)x-2(2i)=0$

$x^2+(2i-1)x-2i=0$

$(x+2i)(x-1)=0$

$\therefore x=-2i$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2i)^2+1^2=-3$

11. $x^2+x+2=0$의 두 근이 α, β일 때, α^2+1, β^2+1을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?

① $x^2-2x+2=0$
② $x^2+2x+2=0$
③ $x^2+2x+3=0$
④ $x^2-x+2=0$
⑤ $x^2+x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2 \quad \cdots$ ㉠
$\alpha^2+1,\ \beta^2+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha^2+1+\beta^2+1)x+(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=0 \quad \cdots$ ㉡
그런데, ㉠으로부터 $\alpha^2+1+\beta^2+1=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2=-1$
$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1=2$
이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x+2=0$

12. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한근이 ω일 때 $x=\dfrac{2}{\omega+1}$가 $x^2+px+q=0$의 근이다. 이 때, 유리수 p, q의 합을 바르게 구한 것은?

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+x+1=0$ 의 두 근 : $\omega, \overline{\omega}$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\cdot\overline{\omega}=1$

$x^2+px+q=0$ 의 두 근 : $\dfrac{2}{\omega+1}, \dfrac{2}{\overline{\omega}+1}$

$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\overline{\omega})+4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=2$$

$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=4$$

$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$

해설

$$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$라 하자.

$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$

$\therefore$ 다른 한근은 켤레복소수인 $1+\sqrt{3}i$가 된다.

$p=-$(두근의 합)$=-2$, $q=$(두근의 곱)$=4$

$p+q=2$

13. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad =y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad =(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

14. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. a, b의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$
② $a=0,\ b=-\frac{1}{2}$
③ $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3}$
④ $a=2,\ b=-\frac{1}{4}$
⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a \cdots\cdots$ ①

$\alpha\beta=b \cdots\cdots$ ②

$\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 이므로

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-a \cdots\cdots ③$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=b \cdots\cdots ④$$

③에서 $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$

$\therefore\ -a+\frac{-a}{b}=-a \quad \therefore\ -\frac{a}{b}=0 \quad \therefore\ a=0$

④에서 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\frac{1}{b}+2=b,$

$\frac{1}{b}+2=0 \quad \therefore\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

15. x에 관한 방정식 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$에서 두 근의 절대값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a \neq \pm b$)

① ab ② $\dfrac{a+b}{a-b}$ ③ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

해설

$(m+1)(x^2-bx)=(m-1)(ax-c)$

$mx^2-bmx+x^2-bx=amx-cm-ax+c$

$(m+1)x^2+(a-b-am-bm)x+cm-c=0$의 두 근을 α,β라고 하면,

$\alpha+\beta=0$

$\therefore \dfrac{a-b-am-bm}{m+1}=0,\quad am+bm=a-b$

$m(a+b)=a-b,\ \ a\neq -b$이므로 $a+b\neq 0$

$\therefore m=\dfrac{a-b}{a+b}$