

1. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$

㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$

㉣ $k(x) = x^3$

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응
㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.
㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.
그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

- i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

3. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$$(f \circ f)(x) = (x^3 + x^2 + x - 5)^3 + (x^3 + x^2 + x - 5)^2 + (x^3 + x^2 + x - 5) - 5$$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x=1$ 을 대입한 것과 같다.

$f(1) = -2$ 이므로

$$\therefore f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$$

4. 두 함수 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $-6x + 3k + 2 = -6x - 4 + k$
 $2k = -6$ 에서 $k = -3$

5. 함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 에 대하여 $g(3x-1) = f(x)$ 을 항상 만족시키는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$

③ $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

⑤ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

② $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

④ $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

해설

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ 에서 } f(x) = 2x + 3$$

$$g(3x-1) = f(x) \text{ 에서 } g(3x-1) = 2x + 3$$

$$3x-1 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t+1}{3} \text{ 이므로}$$

$$g(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right) + 3, \quad g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

6. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

7. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a > -1$
 ④ $a < 1$ ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1$, $x < 1$ 인 경우로 나누면,
 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$
 $x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
 $x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

$$\text{즉, } -2(a-1) > 0, a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

8. 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개

② 5 개

③ 10 개

④ 20 개

⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1, 2\}$ 이고 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
 a, b, c, d, e 5가지
 $f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4가지
 $\therefore 5 \times 4 = 20(\text{개})$

9. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 12개

해설

조건 Ⅰ에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면
 $f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ에 의해
 $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는
원소는 0의 1가지,
1이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 1, 2의 4가지,
-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은?(단, $a \neq 0$)

- ① 60
- ② 55
- ③ 51
- ④ 48
- ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } \textcircled{1} &= \textcircled{2} \text{이므로} \\ 2a &= 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1 \\ \text{위의 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, \quad b = 0 (\because a \neq 0) \\ \text{즉, } f(x) &= x \text{이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55\end{aligned}$$

11. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$2x-1 = 3t$ 이므로 $x = \frac{3t+1}{2}$

$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$

$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$

12. 함수 $f_n(x)$ (n 은 자연수)는 보기의 두 조건을 만족한다.

보기

㉠ $f_1(x) = \frac{1-x}{x+1}$

㉡ $f_n(x) = (f_{n-1} \circ f_1)(x) (n = 2, 3, 4, \dots)$

이 때, $f_{2007}(2)$ 의 값은? (단, $x \neq -1$)

① $\frac{1}{3}$

② 2

③ $\frac{1}{5}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{7}{5}$

해설

$f_1(2) = -\frac{1}{3}, f_2(2) = 2, f_3(2) = -\frac{1}{3}, f_4(2) = 2 \cdots$

$\Rightarrow f_{2n}(2) = 2, f_{2n+1}(2) = -\frac{1}{3}$

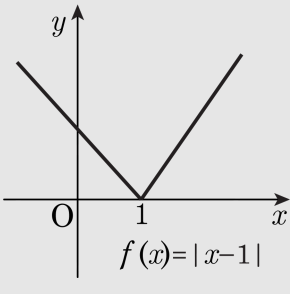
$\therefore f_{2007}(2) = -\frac{1}{3}$

13. 함수 $f(x) = |x - 1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

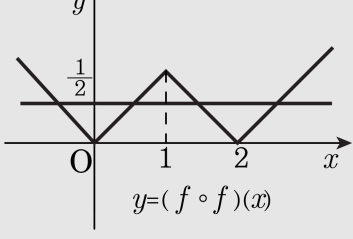
- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

14. 집합 $X = \{x \mid x \leq a, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

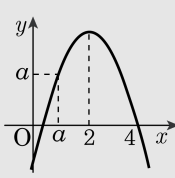
해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \leq 2$, $f(a) =$

$$a \\ -a^2 + 4a = a \quad \therefore a = 0, 3$$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0



15. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

- ① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($x \geq 2$), $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} g(5) &= 4 \text{ 이므로 } g^{-1}(4) = 5 \\ (f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

17. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 + x$, $f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은 ?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$f^{-1}(2) = c \text{ 라 하면 } f(c) = 2 \rightarrow c^2 + c = 2$$

$$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 2) = 0$$

$$c > 0 \text{ 이므로 } c = 1$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

$$f(x)g(x) = x + 2 \text{ 에 } x = 1 \text{ 을 대입하면}$$

$$f(1)g(1) = 3$$

$$(1^2 + 1)g(1) = 3$$

$$\therefore g(1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f^{-1})(2) &= g\{f^{-1}(2)\} \\ &= g(1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

18. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{그러므로 } f^{-1}(k) = -4$$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \text{ } (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

19. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

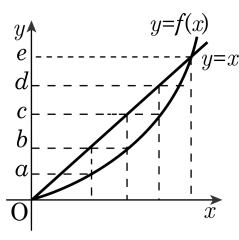
$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 $x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
 $x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
 $\sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

20. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$
 $f^{-1}(b) = k$ 라고 하면, $f(k) = b$
 $\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$
또, $f^{-1}(c) = t$ 라고 하면, $f(t) = c$
 $\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$