1. 정의역이 $X = \{-1, 1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

① $f(x) = x$　② $f(x) = x^2$　③ $f(x) = \frac{1}{x}$

④ $f(x) = x^3$　⑤ $f(x) = x|x|$

해설

$f(a) = a$ 가 항등함수의 정의이므로

①, ③, ④, ⑤ : $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$

② : $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로

②는 항등함수가 될 수 없음

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여

$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$

$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$

$\therefore x = 3$

3. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

4. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$　　② $y = \frac{1}{4}x - 2$　　③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,

$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$

즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$

$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$

$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$

$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1,\ xy - x = 2y+1,\ xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$\therefore\ y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$= \dfrac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

6. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1,\ a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.

7. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면
$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$는 감소함수

8. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　② $a \le -1$　③ $a > -1$

④ $a < 1$　⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

9. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U,\ X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$
$X \cup Y = \varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X) = n(Y)$
$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ X \cup Y = \varnothing$ 이므로
$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.
$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$
$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

10. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times4\times1=4$ (개)

11. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$　　㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ &\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)\end{aligned}$$

㉡. $$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

㉢. $$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

12. $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\dfrac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\dfrac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\dfrac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

13. 실수 x를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

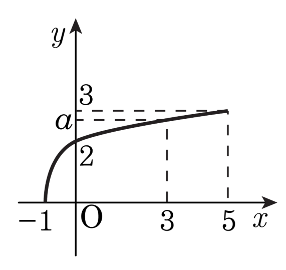
$f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$ 에서

$f_1\left(\frac{2}{3}\right)=-1,\ f_2(-1)=\frac{2}{3}$

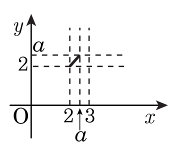
$f_3\left(\frac{2}{3}\right)=-1,\ f_4(-1)=\frac{2}{3}\cdots$

따라서 $f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right)=-1$

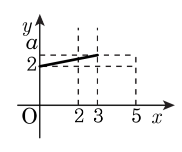
14. 실수 $-1 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는?



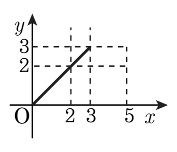
①



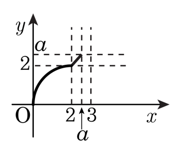
②



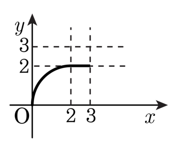
③



④



⑤



해설

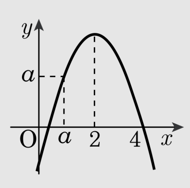
실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$에서 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는
$y = f(x)$ $(0 \le x \le 3)$가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

15. 집합 $\mathrm{X} = \{x \mid x \le a,\ x\text{는 실수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 역함수가 존재할 때, a 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



정의역, 공역은 모두 a 이하이고 $a \le 2$, $f(a) = a$

$-a^2 + 4a = a \qquad \therefore\ a = 0,\ 3$

a 는 2보다 작아야 하므로 구하는 값은 0

16. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 이므로 $(g \circ f)(3x) = x$

$3x = t$ 로 치환하면 $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{1}{3}x$

$3x + 2 = 2$ 일 때 $x = 0$

$\therefore\ g(2) = 0$

17. 세 함수 $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x-3$, $h(x) = ax+b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned}((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\ &= g(f(x-3)) \\ &= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\ &= (2x-5)-3 = 2x-8\end{aligned}$$

$2x-8 = ax+b$ 에서 $a=2, b=-8$

$\therefore a+b=-6$

18. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=(f \circ f)^{-1}(x)=1$

$(f \circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

19. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2,2), (3,3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

20. 함수 $f(x)$가 $f(x) = \begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x-9 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x - 9 = x$에서 $x = 9$

$\frac{2}{3}x - 9 = x$에서 $x = -27$

따라서, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은

$9 + (-27) = -18$