1. 다음은 5 명의 학생의 50m 달리기 결과의 편차를 나타낸 표이다. 이 5 명의 50m 달리기 결과의 평균이 7 점 일 때, 영진이의 성적과 표준편차를 차례대로 나열한 것은?

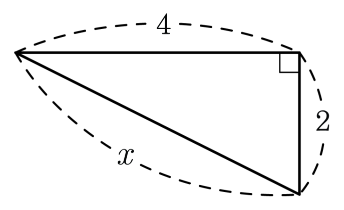
이름	윤숙	태경	혜진	도경	영진
편차(점)	-1	1.5	x	0.5	0

① 5 점, $\sqrt{0.8}$kg ② 6 점, $\sqrt{0.9}$kg ③ 6 점, 1kg
④ 7 점, $\sqrt{0.9}$kg ⑤ 8 점, 1kg

해설

영진이의 성적은 $7-0=7$(점)
또한, 편차의 합은 0 이므로
$-1+1.5+x+0.5+0=0,\quad x+1=0 \quad \therefore x=-1$
따라서 분산이
$$\frac{(-1)^2+1.5^2+(-1)^2+0.5^2+0^2}{5}=\frac{4.5}{5}=0.9$$
이므로 표준편차는 $\sqrt{0.9}$kg 이다.

2. 다음 그림에서 x 의 값은?



① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

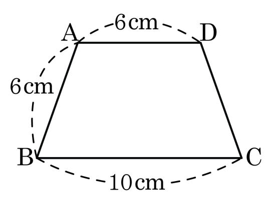
피타고라스 정리에 따라

$4^2 + 2^2 = x^2$

$x^2 = 20$

$x > 0$ 이므로 $x = 2\sqrt{5}$ 이다.

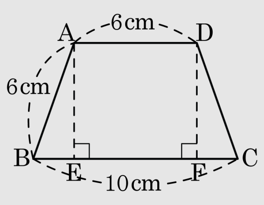
3. 다음과 같은 등변사다리꼴 ABCD 의 넓이는?



① $30\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$　② $31\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$　③ $32\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$
④ $33\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $34\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$

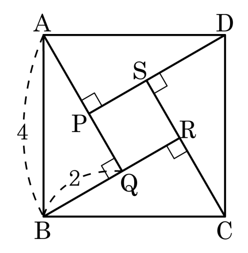
해설

점 A 와 점 D 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자.
□ABCD 가 등변사다리꼴이므로 $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$ 이다. 따라서 $\overline{BE} = \overline{CF} = 2(\mathrm{cm})$
$\triangle ABE$ 에 피타고라스 정리를 적용하면
$\overline{AE} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}(\mathrm{cm})$



따라서 □ABCD 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (10+6) \times 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}(\mathrm{cm}^2)$

4. 다음 그림의 정사각형 ABCD 에서 네 개의 직각삼각형이 합동일 때, 정사각형 PQRS 의 한 변의 길이는?



① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $2(\sqrt{3}-1)$ ③ $3(\sqrt{2}-1)$

④ $3(\sqrt{3}-1)$ ⑤ 3

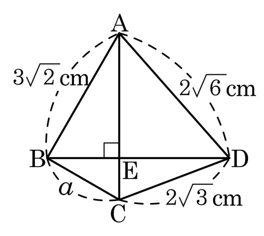
해설

$\overline{AP} = \overline{BQ} = 2,\ \overline{AQ} = \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$

$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = 2\sqrt{3}-2$

$\therefore$ □PQRS 의 한 변의 길이는 $2(\sqrt{3}-1)$ 이다.

5. 그림과 같이 □ABCD 의 대각선은 서로 수직으로 만난다. 대각선의 교점을 E 라고 할 때, a 를 구하여라.



▶ 답 : cm

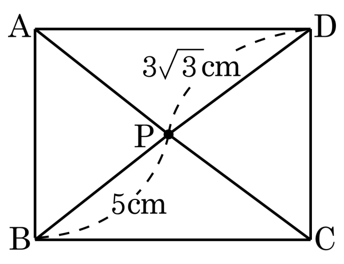
▷ 정답 : $\sqrt{6}$ cm

해설

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$ 가 성립하므로 $\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + a^2$

따라서 $a = \sqrt{18 + 12 - 24} = \sqrt{6}(\mathrm{cm})$ 이다.

6. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 의 내부에 한 점 P 가 있다. $\overline{\mathrm{PB}}=5\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{PD}}=3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 값은?

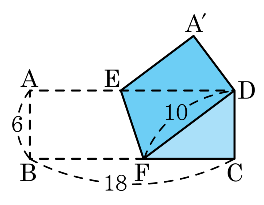


① 34 ② 42 ③ 49 ④ 50 ⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=(3\sqrt{3})^2+5^2=52$ 이다.

7. 다음 그림은 직사각형 ABCD 의 점 B 가 점 D 에 오도록 접은 것이다. $\overline{\mathrm{BF}}$ 의 길이는?



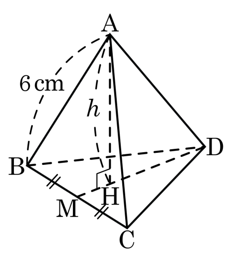
① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{FD}}$

$\therefore \overline{\mathrm{BF}} = 10$

8. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6cm 인 정사면체 A – BCD 의 꼭짓점 A 에서 밑면 BCD 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H는 정삼각형 BCD 의 무게중심이다. $\overline{AH}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{3}$cm ② $12\sqrt{3}$cm ③ $12\sqrt{6}$cm
④ $2\sqrt{6}$cm ⑤ $2\sqrt{3}$cm

해설

$\triangle$BCD 에서 $\overline{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

$\overline{DH} : \overline{HM} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{DH} = \dfrac{2}{3} \times \overline{DM} = \dfrac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

직각삼각형 AHD 에서 $h = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

9. 수진이의 4 회에 걸친 영어 단어 쪽지 시험의 성적의 평균이 8.5 점이었다. 5 회 째의 시험 성적이 떨어져 5 회까지의 평균이 4 회까지의 평균보다 1 점 내렸다면 5 회 째의 성적을 구하여라.

▶ 답： 점

▷ 정답： 3.5 점

해설

4 회까지의 평균이 8.5 점이므로 4 회 시험까지의 총점은
$8.5 \times 4 = 34$(점)
5 회까지의 평균은 8.5 점에서 1 점이 내린 7.5 점이므로 5 회째의 성적을 x 점이라고 하면
$\frac{34+x}{5} = 7.5$, $34 + x = 37.5$ $\therefore x = 3.5$(점)

10. 다음의 표준편차를 순서대로 x, y, z 라고 할 때, x, y, z 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

X : 1 부터 200 까지의 짝수
Y : 1 부터 200 까지의 홀수
Z : 1 부터 400 까지의 4 의 배수

① $x = y = z$ ② $x < y = z$ ③ $x = y < z$
④ $x = y > z$ ⑤ $x < y < z$

해설

X, Y, Z 모두 변량의 개수는 100 개이다.
이때, X, Y 는 모두 2 만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 X, Y 의 표준편차는 같다.
한편, Z 는 4 만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 X, Y 보다 표준편차가 크다.

11. 5개의 변량 $4, 5, x, 11, y$ 의 평균이 6이고 분산이 8일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 58

해설

5개의 변량의 평균이 6이므로 $x + y = 10$ 이다.

$$\frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (x-6)^2}{5}$$

$$+ \frac{(11-6)^2 + (y-6)^2}{5} = 8$$

$4 + 1 + (x-6)^2 + 25 + (y-6)^2 = 40$

$x^2 + y^2 - 12(x+y) + 72 + 30 = 40$

$x^2 + y^2 - 12(10) + 72 + 30 = 40$

$\therefore x^2 + y^2 = 58$

12. 10개의 변량 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 의 평균이 6이고 분산이 5일 때, 다음 10개의 변량의 평균과 분산을 구하여라.

$-3x_1 + 1, -3x_2 + 1, \cdots - 3x_{10} + 1$

▶ 답 :

▶ 답 :

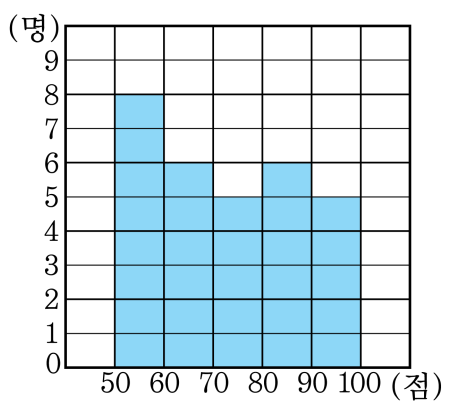
▷ 정답 : 평균 : -17

▷ 정답 : 분산 : 45

해설

(평균)$= -3 \cdot 6 + 1 = -17$,
(분산)$= (-3)^2 \cdot 5 = 45$

13. 다음은 희종이네 반 학생 30 명의 수학 성적을 나타낸 히스토그램이다. 희종이네 반 학생들의 수학 성적의 분산과 표준편차를 차례대로 구하면?



① $\frac{53}{2}, \frac{\sqrt{106}}{2}$　② $\frac{161}{2}, \frac{\sqrt{322}}{2}$　③ $\frac{571}{3}, 4\sqrt{11}$

④ $\frac{628}{3}, \frac{2\sqrt{471}}{3}$　⑤ $\frac{525}{4}, 5\sqrt{21}$

해설

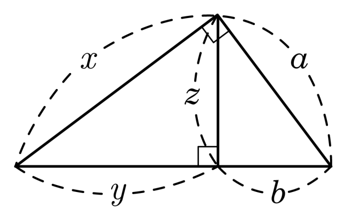
평균 : $\frac{55\times 8+65\times 6+75\times 5+85\times 6}{30}+\frac{95\times 5}{30}=73$

편차 : $-18,\ -8,\ 2,\ 12,\ 22$

분산 : $\frac{(-18)^2\times 8+(-8)^2\times 6+2^2\times 5+12^2}{30}+\frac{6+22^2\times 5}{30}=\frac{628}{3}$

표준편차 : $\sqrt{\frac{628}{3}}=\frac{2\sqrt{471}}{3}$

14. 다음 중 옳은 것은?

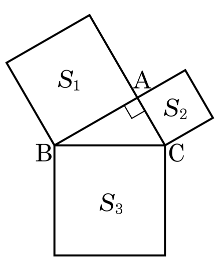


① $x+a=y+b$　② $y^2+z^2=a^2$　③ $a^2-z^2=b^2$
④ $x-a=y-b$　⑤ $x\times z=a\times z$

해설

피타고라스 정리에 따라 $z^2+b^2=a^2$
따라서 $a^2-z^2=b^2$ 이다.

15. 다음 그림은 직각삼각형 ABC 에서 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$ 일 때, $S_2:S_3$ 는?



① $2:\sqrt{5}$　② $\sqrt{5}:3$　③ $2:3$

④ $5:9$　⑤ $4:5$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$ 이므로

$S_1:S_3=4:9$

$S_1=4a$라 하면 $S_3=9a$

$S_2=S_3-S_1=5a$

따라서 $S_2:S_3=5:9$ 이다.

16. 다음 중 직사각형의 넓이가 서로 같은 것은?

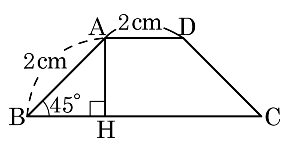
㉠ 가로의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이고, 대각선의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 직사각형
㉡ 세로의 길이가 6 이고, 대각선의 길이가 $8\sqrt{2}$ 인 직사각형
㉢ 가로의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고, 세로의 길이가 4 인 직사각형
㉣ 대각선의 길이가 14 이고, 세로의 길이가 12 인 직사각형

① ㉠,㉡ ② ㉠,㉢ ③ ㉡,㉢ ④ ㉡,㉣ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 피타고라스 정리에 따라서
세로의 길이는 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$ 이므로
직사각형의 넓이는 $2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{3}$
㉡ 피타고라스 정리에 따라서
가로의 길이는 $\sqrt{(8\sqrt{2})^2-(6)^2}=4\sqrt{23}$ 이므로
직사각형의 넓이는 $6\times 4\sqrt{23}=24\sqrt{23}$
㉢ 직사각형의 넓이는 $2\sqrt{3}\times 4=8\sqrt{3}$
㉣ 피타고라스 정리에 따라서
가로의 길이는 $\sqrt{(14)^2-(12)^2}=2\sqrt{13}$ 이므로
직사각형의 넓이는 $2\sqrt{13}\times 12=24\sqrt{13}$
따라서 직사각형의 넓이가 같은 것은 ㉠,㉢이다.

17. 다음 그림의 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다. $\overline{AB} = 2\,\mathrm{cm}$, $\overline{AD} = 2\,\mathrm{cm}$, $\angle B = 45°$ 일 때, $\overline{BC}$의 길이는?



① $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$　② $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$　③ $(1+2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$
④ $(2+2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$　⑤ $(4+4\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$

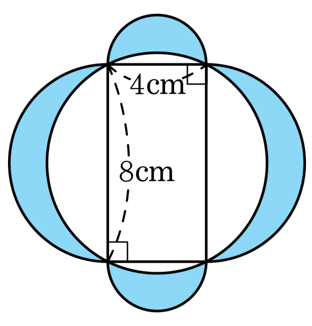
해설

$\triangle ABH$ 는 한 내각의 크기가 $45°$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{BH} : \overline{AH} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$\overline{BH} : \overline{AH} : 2 = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 에서 $\overline{AH} = \overline{BH} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2(\mathrm{cm})$

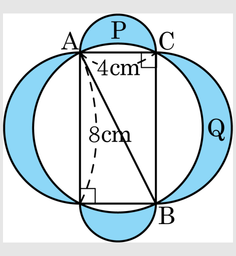
18. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 각 변을 지름으로 하는 반원을 그릴 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm^2

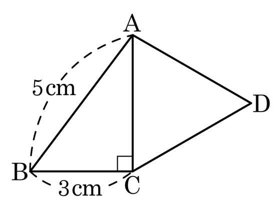
▷ 정답 : 32 cm^2

해설



색칠한 부분 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ 의 넓이는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이와 같다.
따라서 색칠한 전체 넓이는 직사각형의 넓이와 같다.
$\therefore\ 4\times 8=32(\mathrm{cm}^2)$

19. 다음 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 3\,\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 한 변으로 하는 정삼각형 ACD 의 넓이를 구하면?



① $4\,\mathrm{cm}^2$
② $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$
③ $3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$
④ $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$
⑤ $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{AC} = 4\,\mathrm{cm}$ 이므로

$\triangle$ACD 의 넓이 $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

20. 모든 모서리의 길이가 $6\sqrt{2}$ 인 정사각뿔 O – ABCD 의 부피를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 144

해설

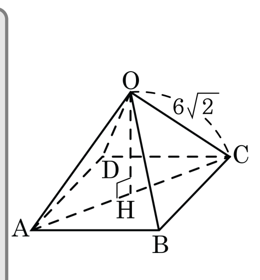
위의 그림에서 $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\times 12 = 6$

$\triangle OAH$ 에서 $\angle OHA = 90°$ 이므로

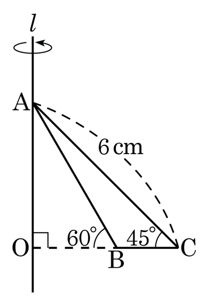
$\overline{OH}^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 6^2 = 36$

$\overline{OH} = 6 \ \left(\because \ \overline{OH} > 0\right)$

$\therefore$ (정사각뿔의 부피) $= \frac{1}{3} \times \left(6\sqrt{2}\right)^2 \times 6 = 144$



21. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 를 직선 l 을 회전축으로 하여 1 회전시켰을 때 생기는 입체도형의 부피를 구하면?

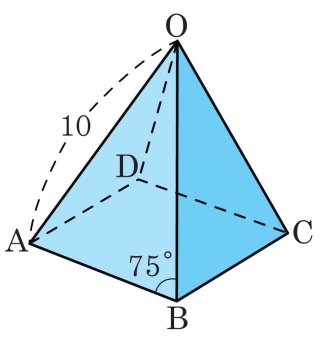


① $4\sqrt{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$ ② $6\sqrt{2}\pi\,\mathrm{cm}^3$
③ $12\sqrt{2}\pi\,\mathrm{cm}^3$ ④ $12\sqrt{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$
⑤ $24\sqrt{2}\pi\,\mathrm{cm}^3$

해설

$\triangle AOC$ 에서 $\overline{AO} : \overline{CO} : \overline{AC} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{2}$, $\overline{AO} : 6 = 1 : \sqrt{2}$, $\therefore\ \overline{AO} = \overline{CO} = 3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$
$\triangle AOB$ 에서 $\overline{AO} : \overline{BO} = \sqrt{3} : 1$
$\therefore\ \overline{BO} = \sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$
따라서 부피는 $\left(\frac{1}{3} \times \pi \times (3\sqrt{2})^2 \times 3\sqrt{2}\right)$
$- \left(\frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{6})^2 \times 3\sqrt{2}\right)$
$= 18\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\pi = 12\sqrt{2}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ 이다.

22. 다음과 같은 정사각뿔에서 삼각형 OAB 의 무게중심에서 삼각형 OCD 의 무게중심까지 겉면을 따라 이동할 수 있는 가장 짧은 거리를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

해설

$\angle OBA = 75°$ 이므로 $\angle AOB = 180 - 2 \times 75 = 30°$ 이고, 삼각형 OAB 의 무게중심을 P, 삼각형 OCD 의 무게중심을 Q 라 할 때, 전개도에서 $\angle POQ = 60°$ 이므로 $\triangle OPQ$ 는 정삼각형이 된다.
따라서 구하는 거리는 점 O 에서 P 까지의 거리이다.

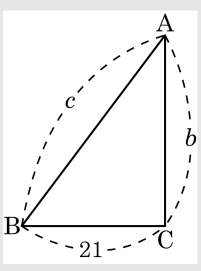
$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

23. 세 변의 길이가 모두 자연수이고, $\angle C = 90°$, $\overline{BC} = 21$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ 인 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 294

해설



위의 그림의 $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ 라 하자. (단, b, c는 자연수이다.)

$c^2 = 21^2 + b^2$, $c^2 - b^2 = 21^2$

$(c-b)(c+b) = 3^2 \times 7^2$

그런데 $\triangle ABC$ 의 넓이, 즉 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times b \times 21$ 이 최소가 되려면 b 의 값이 최소가 되어야 한다.

따라서 $c+b > c-b$ 인 경우를 순서쌍 $(c+b,\ c-b)$ 로 나타내어 보면

$$(c+b,\ c-b) = (7^2,\ 3^2),\ (7^2 \times 3,\ 3),\ (7 \times 3^2,\ 7),\ (7^2 \times 3^2,\ 1)$$

이때, b 의 값이 최소가 되는 경우는

$c + b = 7 \times 3^2$, $c - b = 7$ 이다.

$\therefore\ c = 35,\ b = 28$ ($b > 21$ 에 만족한다.)

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2} \times 21 \times 28 = 294$ 이다.

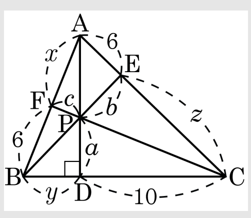
24. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A, B, C 에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 할 때, $\overline{AE} = 6$, $\overline{BF} = 6$, $\overline{CD} = 10$ 이다. 이때 $\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 172

해설

다음 그림과 같이 세 수선의 교점을 P 라 하면



$\triangle PAF$ 와 $\triangle PAE$ 에서 $x^2 + c^2 = 6^2 + b^2 \cdots$ ①

$\triangle PBF$ 와 $\triangle PBD$ 에서 $y^2 + a^2 = 6^2 + c^2 \cdots$ ②

$\triangle PDC$ 와 $\triangle PCE$ 에서 $z^2 + b^2 = 10^2 + a^2 \cdots$ ③

①, ②, ③을 변끼리 더하면

$x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 + 6^2 + 10^2 = 172$

따라서 $\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = 172$ 이다.

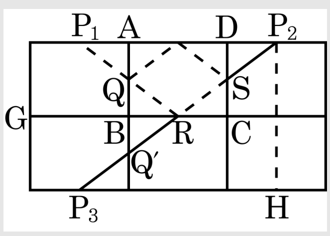
25. 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정사각형 ABCD 의 각 변 위에 점 P, Q, R, S 를 잡을 때, 사각형 PQRS 의 둘레의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

다음 그림과 같이 □ABCD 와 합동인 직사각형을 작도하여 점 P 를 각각 변 AB 와 CD 에 대해 대칭이동한 점 P_1, P_2 를 잡으면



$\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}$

$\overline{PS}+\overline{SR}=\overline{P_2S}+\overline{SR}$

다시, 점 P_1, Q 를 GB 에 대해 대칭이동한 점 P_3, Q′ 를 잡으면 $\overline{P_1Q}+\overline{QR}=\overline{P_3Q'}+\overline{Q'R}$ 이 되어 □PQRS 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{P_2P_3}$ 의 길이가 된다.

따라서 $\overline{P_2P_3}=\sqrt{\overline{P_3H}^2+\overline{P_2H}^2}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=12$ 이다.