

1. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = 1 - x^2$

㉡ $g(x) = 3x - 2$

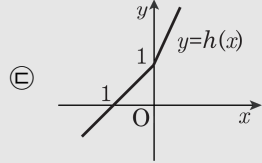
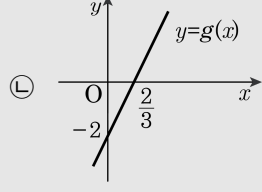
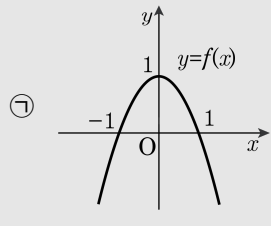
㉢ $h(x) = |x| + 2x + 1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉢에서 $x \geq 0$ 일 때 $h(x) = 3x + 1$ 이고, $x < 0$ 일 때 $h(x) = x + 1$ 이므로

㉠, ㉡, ㉢의 세 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



따라서 보기 중 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢이다.

2. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

3. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때, } (f \circ f)(x) \text{는 무엇인가?}$$

① $-x$

② $1-x$

③ $2x-3$

④ x

⑤ $x+2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x)) = f(x) = x$

(ii) x 가 무리수이면 $1-x$ 도 무리수이므로,

$$f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$$

(i), (ii)에 의해서 $f(f(x)) = x$

4. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1 \quad (\because f(2) = 3)$$

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

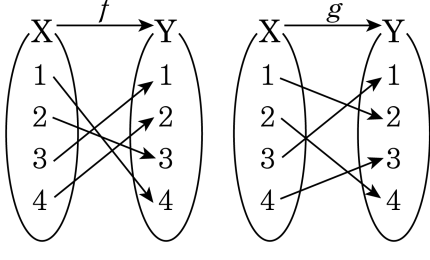
5. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

6. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
 역함수가 존재한다.
 $\therefore g \cdot f^{-1}$
 $= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
 $= h \cdot I = h$
 $\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
 $= g(f^{-1}(2))$
 $= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$
 $\therefore g(4) = 3$

7. 함수 f 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $\dots$, $f^n \circ f = f^{n+1}$ 이라고 정의한다. $f(x) = x - 1$ 일 때, $f^{1998}(1)$ 의 값은?

① -1998

② -1997

③ 0

④ 1

⑤ 1998

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$f^3(x) = f^2(f(x)) = (x - 1) - 2 = x - 3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = x - n \text{ (} n \text{ 은 정수)}$$

$$f^{1998}(x) = x - 1998$$

$$\therefore f^{1998}(1) = -1997$$

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = |x-2| + ax - 6$ 이 역함수를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 0$

③ $0 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a < -1$ 또는 $a > 1$

해설

$$f(x) = |x-2| + ax - 6$$

$$= \begin{cases} (a+1)x - 8 & (x \geq 2) \\ (a-1)x - 4 & (x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서, 기울기 $a+1$ 와 $a-1$ 은 모두 양이거나 모두 음이어야 한다.

$$\text{즉, } (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

9. 함수 $f(x) = 2x + |x|$ 의 역함수를 $g(x) = ax + b|x|$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 3x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases} \text{의}$$

역함수를 구한 것이

$$g(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases} \text{가 되어야한다.}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $y = 3x$ 의 역함수를 구하면

$$x = 3y (y \geq 0), \text{ 즉 } y = \frac{x}{3} (x \geq 0)$$
$$\therefore a + b = \frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $y = x$ 의 역함수를 구하면

$$x = y (y < 0), \text{ 즉 } y = x (x < 0)$$
$$\therefore a - b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$$
$$\therefore 3ab = -\frac{2}{3}$$

10. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

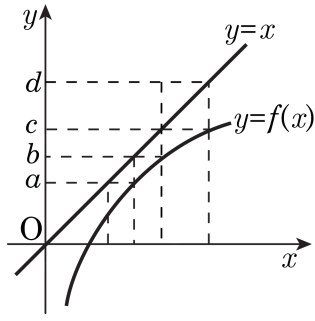
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

12. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

13. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$

이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

- ① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$

$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$

15. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(2g(x) - \frac{x}{x-1}\right) = x$ 라 할 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ \therefore 2g(x) - \frac{x}{x-1} &= g(x) \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x}{x-1} \\ f(2) &= k \text{ 라고 하면} \\ g(k) = 2 &\Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$