

1. 다음은 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cap (B \cap A^c)$ 를 간단히 하는 과정이다.

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (B \cap A^c) \\ &= (\ominus) \cap (B \cap A^c) \\ &= A \cap (\ominus) \cap A^c \\ &= (A \cap A^c) \cap (\ominus) \\ &= (\ominus) \cap (\ominus) = (\ominus)\end{aligned}$$

빈 칸에 들어갈 식을 바르게 나타낸 것은?

- ① $(\ominus) A \cup B^c$

② $(\ominus) B^c \cup B$

③ $(\ominus) U$

④ $(\ominus) \emptyset$

⑤ $(\ominus) U$

해설

$$\begin{aligned}(\ominus) : A - B &= A \cap B^c \\ (\ominus) : (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) &= A \cap (B^c \cap B) \cap A^c \\ (\ominus), (\ominus), (\ominus) : (A \cap A^c) \cap (B^c \cap B) &= \emptyset \cap \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

2. 다음 등식 $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$ 가 성립함을 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 보인 것이다.

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= A \cap (\boxed{}) \\ &= A \cap (\boxed{})^c \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

이 때, 안에 알맞은 집합을 순서대로 적으면?

- ① $B^c \cup C^c, B \cap C$

② $B^c \cup C^c, B \cup C$

③ $B^c \cup C^c, B - C$

④ $B^c \cap C^c, B \cap C$

⑤ $B^c \cap C^c, B \cup C$

해설

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) : \text{차집합의성질} \\ &= A \cap [(B^c \cap C^c)] : A \cap A = A, \text{결합법칙} \\ &= A \cap [(B \cup C)^c] : \text{드 모르간의 법칙} \\ &= A - (B \cup C) : \text{차집합의성질}\end{aligned}$$

3. 두 집합 $A = \{1, 4, a^2 + 2a\}$, $B = \{a + 2, a^2, 2a - 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, $B - A$ 를 구하면?

① $\{-1\}$

② $\{2\}$

③ $\{-1, 2\}$

④ $\{9\}$

⑤ $\{-2, 2, 9\}$

해설

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로

$a^2 + 2a = 3$, $a^2 + 2a - 3 = 0$, $a = -3$ or 1

(i) $a = -3$ 일 때 $B = \{-9, -1, 9\}$ 로 성립하지 않는다.

(ii) $a = 1$ 일 때 $B = \{-1, 1, 3\}$

$\therefore B - A = \{-1\}$

4. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $A_2 \cap (A_4 \cup A_8)$ 을 간단히 하면?

① A_2

② A_3

③ A_4

④ A_5

⑤ A_6

해설

$$A_2 \cap (A_4 \cup A_8) = A_2 \cap A_4 = A_4 \quad (\because A_4 \subset A_2)$$

5. 자연수 k 의 양의 약수의 집합을 A_k 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $A_8 \subset A_{16}$
 - ② $A_4 \cup A_{12} = A_{12}$
 - ③ m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = \emptyset$
 - ④ $m = kn$ (k 는 자연수)일 때, $A_m \cap A_n = A_n$
 - ⑤ m, n 의 최대공약수가 q 일 때, $A_m \cap A_n = A_q$

해설

- ③ 모든 자연수의 양의 약수에는 반드시 1이 포함되므로 m, n 이 서로소인 경우에 $A_m \cap A_n = \{1\}$
- ⑤ m, n 의 공약수는 최대공약수 q 의 약수이므로 $A_m \cap A_n = A_q$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 을 $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

$$\textcircled{1} \quad A \star \emptyset = A$$

$$\textcircled{2} \quad A \star U = A^c$$

③ $A \star A^c = \emptyset$

④ $A \star B \neq B \star A$

⑤ $A \star B^c \neq A^c \star B$

해설

$$\textcircled{1} \quad A \star \emptyset = (A \cup \emptyset)^c \cup (A \cap \emptyset) \\ = A^c \cup \emptyset = A^c$$

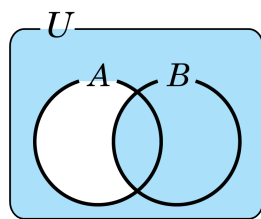
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad A \star U &= (A \cup U)^c \cup (A \cap U) \\ &= U^c \cup A \\ &= \emptyset \cup A = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad A \star A^c &= (A \cup A^c)^c \cup (A \cap A^c) \\ &= U^c \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad A \star B &= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \\ &= (B \cup A)^c \cup (B \cap A) \\ &= B \star A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad A \star B^c &= (A \cup B^c)^c \cup (A \cap B^c) \\ &= (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c \\ &= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c \star B \end{aligned}$$

7. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 22$, $n(A) = 10$, $n(B) = 17$, $n(A \cup B) = 20$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는?



- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

색칠된 부분이 나타내는 집합은 $(A - B)^C$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 17 - n(A \cap B) = 20$$

$$\therefore n(A \cap B) = 7$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 10 - 7 = 3$$

$$\therefore n((A - B)^C) = n(U) - n(A - B) = 22 - 3 = 19$$

8. 학생수가 35명인 대한고등학교 1학년 어느 학급에서, 매점에서 파는 두 종류의 빵을 먹어 본 학생수를 조사했더니 각각 19명, 27명이었다. 두 종류의 빵을 모두 먹어 본 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?
- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$n(U) = 35, n(A) = 19, n(B) = 27$ 이라 하면 $n(A \cap B)$ 이 최대가 될 때는 원소가 적은 쪽이 원소가 많은 쪽에 포함될 때이다.
∴ 최댓값 19

$n(A \cup B) \leq n(U)$ 이므로 $19 + 27 - n(A \cap B) \leq 35, n(A \cap B) \geq 11$
∴ 최솟값 11

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 30
벤다이어그램으로 나타내면 아래와 같다.

8

8

19

[최대]

8

11

16

[최소]

9. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 집합연산이 옳지 않은 것은?
- ① $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
- ② $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
- ③ $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
- ④ $(A \cup C) - (B \cup C) = A - (B \cup C)$
- ⑤ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cup C)$

해설

① (좌변)
 $= (A - B) \cup (A - C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
 $= A - (B \cap C)$
 $=$ 우변 ($\because$ 차집합의 성질)

② (우변)
 $= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.

③ (좌변)
 $= (A - C) \cup (B - C)$
 $= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= (A \cup B) \cap C^c$
 $= (A \cup B) - C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)

④ 좌변
 $= (A \cup C) - (B \cup C)$
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B \cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup [C \cap (B^c \cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
 $= [A \cap (B \cup C)^c] \cup \emptyset$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C)$ (우변)

⑤ 좌변
 $= A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C) \neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

10. 두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$B \subset X \subset A, B \neq X$

▶ 답 : 7 개

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 X 는 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, d 를 항상 원소로 갖는 집합이고 B 가 아니므로

$\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, d, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$ 의 7개이다.

11. 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X | X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 원소의 개수가 적어도 1 개인 부분집합의 개수는 15 개이다. $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원소의 개수가 n 인 진부분집합의 개수는 $2^n - 1$ (개)이므로

$$n(P) = 4$$

집합 P 의 원소의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{n(A)} = 4, n(A) = 2$$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

{1, 2, 3, 5, 7, 9} 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5 인 부분 집합을 찾으려면,
5 는 반드시 포함되고 1, 2, 3 중에 하나만 포함되어야 한다.
(1) 1 과 5 는 포함되고, 2, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
(2) 2 와 5 는 포함되고, 1, 3 은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
(3) 3 과 5 는 포함되고, 1, 2 는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)

13. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ 에서 $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$ 라 약속할 때, 집합 $(A \star B) \star C$ 의 원소의 합은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ 에서
 $A \star B = (A - B) \cup (B - A) = \{3, 4\} \cup \emptyset = \{3, 4\} = D$ 라 하면
 $(A \star B) \star C = D \star C$
 $= (D - C) \cup (C - D)$
 $= \{4\} \cup \{1, 5\} = \{1, 4, 5\}$
원소의 합은 $1 + 4 + 5 = 10$

14. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를
- (1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x + 1, 0, x - 1\}$
 - (2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \{1, x, x^2\}$ 이라고 정의한다.
- 두 집합 $A = \{x|x\text{는 소수인 자연수}\}$, $B = \{3x - 1|x\text{는 자연수}\}$ 일 때,
집합 $(A - B)[2] \cup (B - A)[8]$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x|x\text{는 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$
 $B = \{3x - 1|x\text{는 자연수}\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots\}$
 $2 \notin A - B$ 이므로 $(A - B)[2] = \{1, 2, 4\}$ 이고,
 $8 \in B - A$ 이므로 $(B - A)[8] = \{-7, 0, 7\}$ 이다.
따라서
 $(A - B)[2] \cup (B - A)[8] = \{-7, 0, 1, 2, 4, 7\}$ 이고,
원소의 총합은 7이다.

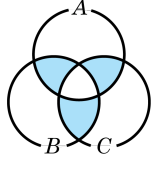
15. 전체 집합의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 15\text{의 약수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C))$ 를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 15\}$, $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 $A - B = \{2, 6\}$, $B - C = \{3, 5, 15\}$, $A - C = \{3, 6\}$
 $\therefore (A - B) \cup (A - C) \cup (B - C) = \{2, 6\} \cup \{3, 6\} \cup \{3, 5, 15\} = \{2, 3, 5, 6, 15\}$
따라서 $n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)) = 5$

16. 1에서 100까지의 자연수 중에서 $A = \{x \mid x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수를 구하여라.

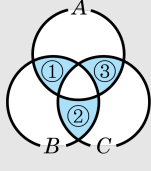


▶ 답 : 23개

▷ 정답 : 23개

해설

색칠된 부분 ①, ②, ③의 원소의 개수를 a, b, c 라 하면 $a = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{1}$,
 $b = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{2}$,
 $c = n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{3}$



$A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 배수}\} \therefore n(A \cap B) = 16$,
 $B \cap C = \{x \mid x \text{는 } 15\text{의 배수}\} \therefore n(B \cap C) = 6$
 $C \cap A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{의 배수}\} \therefore n(C \cap A) = 10$
 $A \cap B \cap C = \{x \mid x \text{는 } 30\text{의 배수}\} \therefore n(A \cap B \cap C) = 3$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의해
 $a + b + c$
 $= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 $= 16 + 6 + 10 - 9 = 23$

17. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50, n(A \cup B) = 38, n(A \cap B) = 9, n(B - A) = 16$ 일 때, $n((A - B)^C)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) - n(B - A) \\ &= 38 - 9 - 16 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$n((A - B)^C) = n(U) - n(A - B) = 50 - 13 = 37$$

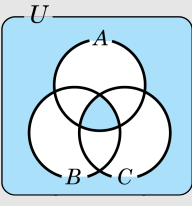
18. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 30\text{이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x \text{는 } 30\text{이하의 } 6\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 30\text{이하의 } 9\text{의 배수}\}$,
 $C = \{9, 12, 18, 20, 25\}$ 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A \Delta B) \cap (A \Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 21$$

$$\therefore n((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) = 1 + 21 = 22$$

19. 세 집합 A, B, C 에 대하여
 $n(A) = 50, n(B) = 32, n(C) = 15, n(A \cup B) = 70, n(A \cap C) = 15, n(B \cap C) = 0$ 일 때,
 $n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$B \cap C = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이 된다.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ 이고

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ 이므로 } n(A \cap B) = 50 + 32 - 70 = 12$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 50 + 32 + 15 - 15 - 12 - 0 + 0 = 70$$

따라서 정답은 $70 + 2 \times 0 = 70$

20. 다음은 현수네 반 학생 40 명을 대상으로 조사한 내용이다. 보기의 내용 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답2개)

자장면을 좋아하는 학생 : 22 명
짬뽕을 좋아하는 학생 : 12 명
두 가지 다 좋아하지 않는 학생 : 8 명

- ① 자장면 또는 짬뽕을 좋아하는 학생은 $40 - 8 = 32$ 명이다.
- ② 두 가지를 다 좋아하는 학생은 $22 + 12 - 32 = 2$ 명이다.
- ③ 자장면과 짬뽕을 좋아하는 학생들의 집합을 각각 A, B 라 하면 둘 다 좋아하는 학생들의 집합은 $A \cup B$ 라고 표현 할 수 있다.
- ④ 자장면 또는 짬뽕을 좋아하는 학생은 전체 학생 수보다 많다.
- ⑤ 자장면을 A , 짬뽕을 B 라 하면 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $(A \cup B)^c$ 라고 표현 할 수 있다.

해설

- ③ 자장면과 짬뽕 둘 다 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
- ④ $n(A \cup B) \leq n(U)$ 이다.

21. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가?

- ① 10 명 ② 12 명 ③ 14 명 ④ 15 명 ⑤ 16 명

해설

전체집합을 U , A 문제를 푼 학생들의 집합을 A , B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면

$$n(U) = 170$$

$$n(A) = 80, n(B) = 90, n(A \cap B) = 15$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 80 + 90 - 15 \\ &= 155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 170 - 155 \\ &= 15 \end{aligned}$$

22. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

- ① 50개 ② 66개 ③ 67개 ④ 76개 ⑤ 78개

해설

문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\leq 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인 $81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in A \rightarrow 3b \notin A \rightarrow 9b \in A \rightarrow 27b \notin A \rightarrow 81b \in A$ 와 같이 된다. 결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개). 따라서 구하는 최댓값은 $67 + 8 + 1 = 76$