

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 $\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$
 $(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,
 $(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$
 $\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$

3. 방정식 $x^2 + y^2 + kx - 2y + 10 = 0$ 이 원을 나타낼 때, k 의 범위를 구하면?

① $-4 < k < 5$

② $k < -4$ 또는 $k > 5$

③ $-6 < k < 6$

④ $k < -6$ 또는 $k > 6$

⑤ $-4 < k < 6$

해설

$$\text{준 식 : } \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{k^2}{4} - 9$$

$$\text{중심이 } \left(-\frac{k}{2}, 1\right),$$

$$\text{반지름이 } \sqrt{\frac{k^2}{4} - 9} \text{ 인 원이 되려면}$$

$$\frac{k^2}{4} - 9 > 0$$

$$\therefore k^2 - 36 > 0$$

$$\therefore (k + 6)(k - 6) > 0$$

$$\therefore k < -6 \text{ 또는 } k > 6$$

4. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

5. 두 점 A (-3, 8), B (7, -4) 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ ② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$ ④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$

⑤ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면

C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8-4}{2} \right)$$

$\therefore C (2, 2)$

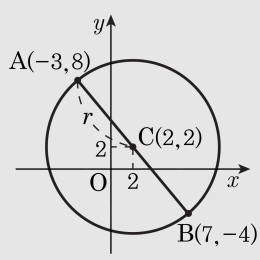
반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$$



6. 세 점 P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3) 을 지나는 원의 중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3)
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$$\begin{cases} (-2 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉠} \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉡} \\ (5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \dots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

㉠, ㉡ 식 연립 :
 $a + 3b = 1 \dots \textcircled{㉤}$
㉡, ㉢ 식 연립 :
 $2a - b = 2 \dots \textcircled{㉥}$
㉤, ㉥ 식 연립 :
 $a + b = 1 \dots \textcircled{㉦}$
㉤, ㉦ 연립하면 $b = 0, a = 1$
㉠ 식에 $(-2 - 1)^2 + (-4 - 0)^2 = r^2$
 $\therefore r^2 = 25$
 $\therefore r = 5$
 $a + b + r = 1 + 0 + 5 = 6$

7. 두 점 A(-2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 + 4x = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$$

즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+2)^2 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$$

8. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면
 $\triangle OPH$ 는 직각삼각형이고,

$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 반지름이므로 1이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x + 6y - 7) = 0,$$

$$\text{즉 } x - y + 1 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 O(0, 0)에서

직선 $\textcircled{1}$ 에 이르는 거리

$$\overline{OH} = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{2}$$

9. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

10. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
 $\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$

11. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

12. 점 A(8, 0)과 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + (y - 4)^2 = 4$

③ $x^2 + (y + 4)^2 = 4$

④ $(x - 4)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x + 4)^2 + y^2 = 4$

해설

$x^2 + y^2 = 16$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

A(8, 0), P(a, b)의 중점의 좌표 M(x, y)는

$M\left(\frac{a+8}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore x = \frac{a+8}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 8, b = 2y$$

이 때, 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 16 \text{ 이 성립한다.}$$

$$(2x - 8)^2 + (2y)^2 = 16$$

$$\therefore (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

13. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
③ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 3 = 0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4x + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$
($k \neq -1$ 인 실수)
이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $1 - 4 + k(1 - 6 + 8) = 0$
 $-3 + 3k = 0 \quad \therefore k = 1$
따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는
원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4x + x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
 $\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

14. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

15. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

16. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

⇒ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$

∴ $k = -2$ ($\because k < 0$)

17. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

18. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 밖의 한 점 $P(8, -4)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $3\sqrt{19}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $5\sqrt{19}$

해설

다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 $P(8, -4)$ 에서
원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 에 접선을 그어
그 접점을 T , 이 원의 중심을 C 라고 하면
 $\triangle PTC$ 는 $\angle PTC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이
므로 피타고라스의 정리에 의하여
 $\overline{PT}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CT}^2$
 $= \{(8-2)^2 + (-4-3)^2\} - 3^2 = 76$
 $\overline{PT} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

19. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 의 중심이 $(4,-2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4,-2)$ 이므로

$$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 이 같으므로

$$-2k=-8, \quad k=4$$

$$3k=20-r^2$$

$$\therefore k=4, \quad r=2\sqrt{2} (\because r>0)$$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

20. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$