1. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

2. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면
$g((-1)+1)=g(0)=f((-1)-1)$
$=f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)-3$
$=-3$

3. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x) = -|x|,\ g(x) = -x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다.　② 두 함수는 상등이 아니다.

③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$　④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$

⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
$f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

4. 집합 $X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 1 + k$
$f(1) = -1 + k$
$f(3) = -3 + k$
이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.
$\therefore X = \{1 + k,\ -1 + k,\ -3 + k\}$
그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로
$X = \{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서
$-3 + k = -1,\ -1 + k = 1,\ 1 + k = 3$
$\therefore k = 2$

5. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$ 를 모두 고르면?

(i) $f(x) = Y$(단, $x \in X$) (ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단,x, $x_2 \in X$)

A . $f(x) = x^2 - 1$ B . $f(x) = \mid x \mid + 2x$ C . $f(x) = x^3 + 1$ D . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

① A, B ② A, C ③ B, C ④ B, D ⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

6. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x) \geq x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$

$\Rightarrow x \leq 0,\ x \geq 5$

$x \geq k$ 이므로 $k = 5$

7. $f \circ f$를 f^2, $f \circ f \circ f$를 f^3과 같이 나타낼 때, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\therefore\ f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f\left((f \circ f)(x)\right)$$

$$= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore\ f^3(2) = 2$$

8. 두 함수 $f(x) = -x + 4,\ g(x) = 3x + 2$에 대하여 $(f \circ g)(k) = 2$를 만족하는 상수 k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2)$
$= -(3x + 2) + 4 = -3x + 2$이므로
$(f \circ g)(k) = 2$에서 $-3k + 2 = 2$
$\therefore k = 0$

9. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

10. 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x) = x+2$　② $f(x) = x-2$　③ $f(x) = 2x$

④ $f(x) = 2x+1$　⑤ $f(x) = 2x+2$

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$　$\cdots$㉠에서

$\frac{x+1}{2} = t$라 하면 $x = 2t-1$ 이므로

이를 ㉠에 대입하면 $f(t) = 2t-1+2 = 2t+1$

$\therefore\ f(x) = 2x+1$

11. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x+3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x + 1$ ② $k(x) = -x + 2$ ③ $k(x) = -x + 3$

④ $k(x) = -x + 4$ ⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$k \circ g = h$ 이므로 $(k \circ g) \circ f = h \circ f$

$k \circ (g \circ f) = h \circ f$

$k \circ I = h \circ f$($\because g \circ f = I$, I는 항등함수)

$\therefore k = h \circ f$($\because k \circ I = I \circ k = k$)

$\therefore k(x) = (h \circ f)(x) = -x + 3$

12. 다음 보기의 함수 $y=f(x)$ 중 $f(x)=f^{-1}(x)$ 를 만족하는 것을 모두 고르면?

보기

Ⅰ. $f(x)=x$
Ⅱ. $f(x)=-x+5$
Ⅲ. $f(x)=-\dfrac{3}{x-2}+2$
Ⅳ. $f(x)=\dfrac{x+4}{2x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ ② Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ ③ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$f(x)$를 $y=x$에 대칭해도 $f(x)$ 가 되면
$f(x)=f^{-1}(x)$ 이다.
Ⅰ. $f(x)=f^{-1}(x)$
Ⅱ. $y=-x+5 \Rightarrow x=-y+5 \Rightarrow y=-x+5$
Ⅲ. $y=\dfrac{-3}{x-2}+2 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{y-2}+2$

$\Rightarrow y=\dfrac{-3}{x-2}+2$

Ⅳ. $y=\dfrac{x+4}{2x-1} \Rightarrow x=\dfrac{y+4}{2y-1} \Rightarrow y=\dfrac{x+4}{2x-1}$

$\therefore$ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ : $f(x)=f^{-1}(x)$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 (x \geq 0) \\ x+1 (x<0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5)+g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$g(5)=a$ 라 하면 $f^{-1}(5)=a$ 에서 $f(a)=5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x)=x^2+1 \geq 1$ 이므로
$f(a)=a^2+1=5$
$\therefore a=2 (\because a \geq 0)$ $\therefore g(5)=2$
또, $g(0)=b$ 라 하면 $f^{-1}(0)=b$ 에서 $f(b)=0$
그런데 $x<0$ 일 때, $f(x)=x+1<1$ 이므로
$f(b)=b+1=0$
$\therefore b=-1$ $\therefore g(0)=-1$
$\therefore g(5)+g(0)=2-1=1$

14. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

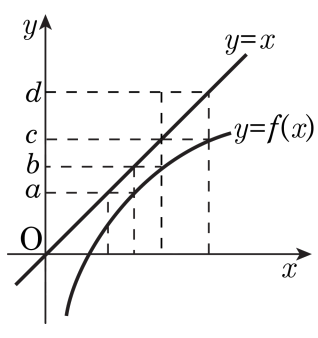
① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4,\ 0)$,$(0,\ 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
$\therefore x = 4$

따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

15. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
$f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

16. 점 $(2,\ 1)$을 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$의 값은?

① -5　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2) + 1 = mx - 2m + 1$ $(m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

17. 집합 $X = \{-1,\ 1, -i,\ i\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1　② -2　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

18. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$ Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$ Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

㉠ $f(2) = 1$ ㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

19. 함수 $f_n(x)$가 $f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의될 때, $f_{28}\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\dfrac{1}{20}$ ② $\dfrac{1}{24}$ ③ $\dfrac{1}{30}$ ④ $\dfrac{1}{32}$ ⑤ $\dfrac{1}{40}$

해설

$f_1(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x)=(f_1\circ f_n)(x)$ 이므로

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x}{2x+1}$$

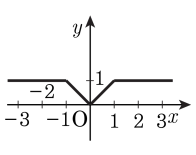
$$f_3(x)=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}}=\frac{x}{3x+1}$$

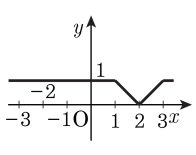
$$\vdots$$

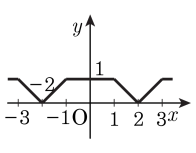
$$f_{28}(x)=\frac{x}{28x+1}$$

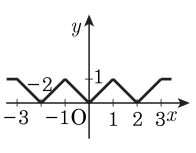
$$\therefore\ f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{15}=\frac{1}{30}$$

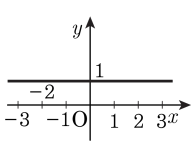
20. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는 ?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

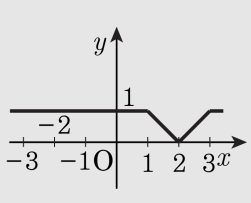
해설

$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$

$g(x) = x - 2$ 에서

$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$



21. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$ ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

22. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g \cdot f)^{-1}(x) = (f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (\mathrm{I} \circ \mathrm{I})(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

23. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서
$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로
$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$
$f(3x + 1) = x$
$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고
$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$
$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$