

1. 실수의 집합을 R 이라 할 때, 함수 $f : R \rightarrow R$ 가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

지역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.

①은 직선으로서 $a > 0$ 이면 증가하고 $a < 0$ 이면 감소하는 그래프이다.

2. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = -|x|$, $g(x) = -x^2$ 의 관계는?

- ① 두 함수는 상등이다. ② 두 함수는 상등이 아니다.
③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$ ④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$
⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
 $f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

4. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1, 1, 3\}$ 에서

$$-3 + k = -1, -1 + k = 1, 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

5. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 모두 고르면?

- (i) $f(x) = Y$ (단, $x \in X$)
(ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단, $x, x_2 \in X$)

- $A . f(x) = x^2 - 1$
 $B . f(x) = |x| + 2x$
 $C . f(x) = x^3 + 1$
 $D . f(x) = \frac{2}{x-1}$

- ① A, B ② A, C ③ B, C ④ B, D ⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

6. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

7. $f \circ f$ 를 f^2 , $f \circ f \circ f$ 를 f^3 과 같이 나타낼 때, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$$

$$\therefore f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$

8. 두 함수 $f(x) = -x + 4$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(k) = 2$ 를 만족하는 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 2) \\ &= -(3x + 2) + 4 = -3x + 2 \text{ 이므로} \\ (f \circ g)(k) &= 2 \text{에서 } -3k + 2 = 2 \\ \therefore k &= 0\end{aligned}$$

9. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

10. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2$ 일 때, $f(x)$ 는 무엇인가?

① $f(x) = x+2$

② $f(x) = x-2$

③ $f(x) = 2x$

④ $f(x) = 2x+1$

⑤ $f(x) = 2x+2$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x+2 \quad \cdots \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\frac{x+1}{2} = t \text{라 하면 } x = 2t-1 \text{ 이므로}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } f(t) = 2t-1+2 = 2t+1$$

$$\therefore f(x) = 2x+1$$

11. 세 함수 f, g, h 가 $(g \circ f)(x) = x$, $(h \circ f)(x) = -x + 3$ 일 때, $k \circ g = h$ 를 만족시키는 함수 $k(x)$ 를 구하면?

① $k(x) = -x + 1$ ② $k(x) = -x + 2$ ③ $k(x) = -x + 3$

④ $k(x) = -x + 4$ ⑤ $k(x) = -x + 5$

해설

$$\begin{aligned} k \circ g &= h \text{ 이므로 } (k \circ g) \circ f = h \circ f \\ k \circ (g \circ f) &= h \circ f \\ k \circ I &= h \circ f (\because g \circ f = I, I \text{는 항등함수}) \\ \therefore k &= h \circ f (\because k \circ I = I \circ k = k) \\ \therefore k(x) &= (h \circ f)(x) = -x + 3 \end{aligned}$$

12. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하는 것을 모두 고르면?

보기

- I. $f(x) = x$
- II. $f(x) = -x + 5$
- III. $f(x) = -\frac{3}{x-2} + 2$
- IV. $f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

- ① I, II, III ② I, II, IV ③ I, III, IV
④ II, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$f(x)$ 를 $y = x$ 에 대칭해도 $f(x)$ 가 되면

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

I. $f(x) = f^{-1}(x)$

II. $y = -x + 5 \Rightarrow x = -y + 5 \Rightarrow y = -x + 5$

III. $y = \frac{-3}{x-2} + 2 \Rightarrow x = \frac{-3}{y-2} + 2$
 $\Rightarrow y = \frac{-3}{x-2} + 2$

IV. $y = \frac{x+4}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{y+4}{2y-1} \Rightarrow y = \frac{x+4}{2x-1}$

$\therefore$ I, II, III, IV : $f(x) = f^{-1}(x)$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

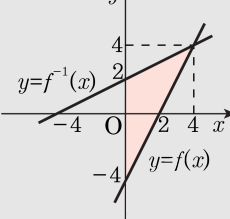
$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

14. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

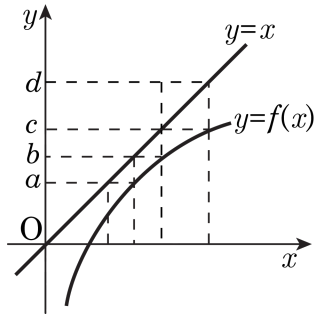
해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
 두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.
 그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.
 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의
 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기
 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
 $\therefore x = 4$



따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로
 그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

15. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

16. 점 $(2, 1)$ 을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

17. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의
치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

18. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\tiny \neg}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\tiny \cup}$ $f(3) = 3f(1)$
- $\textcircled{\tiny \cap}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{1} \textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{2} \textcircled{\tiny \cup}$

$\textcircled{3} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}$
- $\textcircled{4} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cap}$
- $\textcircled{5} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \cap}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \neg}$ 뿐이다.

19. 함수 $f_n(x)$ 가 $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

으로 정의될 때, $f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{20}$
- ② $\frac{1}{24}$
- ③ $\frac{1}{30}$
- ④ $\frac{1}{32}$
- ⑤ $\frac{1}{40}$

해설

$f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ 이므로

$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$

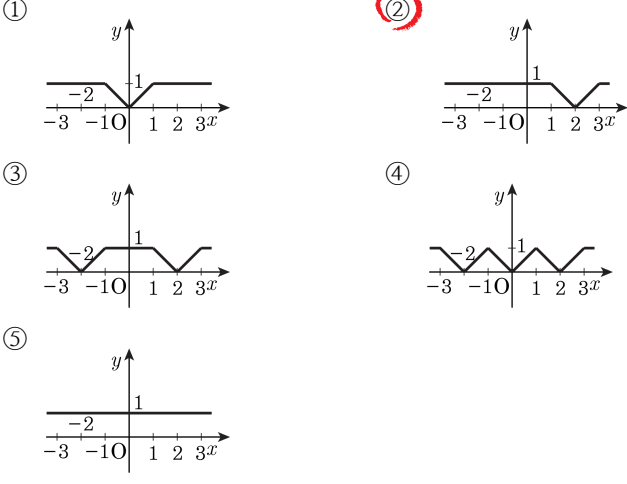
$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{2x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$

$\vdots$

$f_{28}(x) = \frac{x}{28x+1}$

$\therefore f_{28}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{15} = \frac{1}{30}$

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$ 의 그래프는 ?



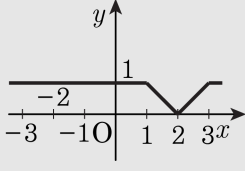
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = x - 2 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x - 2| \geq 1) \\ |x - 2| & (|x - 2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x - 2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



21. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 를 $f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a$ 와 같이 정의한다. 함수 f 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$
- ② $a > 1$
- ③ $0 < a < 2$
- ④ $-\frac{1}{2} < a < 2$
- ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응으려면 $x \geq 1$ 에서 증가함수이므로 $x < 1$ 에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2-2a > 0$ 에서 $a < 1$

22. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \text{ 이므로} \\ (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (I \circ I)(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

23. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$