1. 다항식 ax^3+bx^2-4 가 x^2+x-2로 나누어 떨어지도록 a, b를 정할 때, a와 b의 곱을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2-4 &= (x^2+x-2)Q(x) \\ &= (x-1)(x+2)Q(x) \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$a+b-4=0,\ -8a+4b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ ab=3$

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)(ax+2)$

우변을 전개하여 계수를 비교하면

$a=1,\ b=3\ \therefore\ ab=3$

2. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore\ & f(x) - g(x) - 2r(x) \\ &= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x) \\ &= g(x)\{Q(x) - 1\} - r(x) \end{aligned}$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

3. $a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=1$일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=4\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$

4. 세 실수 a, b, c에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 x, y에 대하여 성립하도록 a, b의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 x, y에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

5. x^3-4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$
\begin{array}{rl}
 & x-6 \\
x^2+2x+1 \,\big) & x^3-4x^2+ax+b \\
- & x^3+2x^2+x \\ \hline
 & -6x^2+(a-1)x+b \\
- & -6x^2-12x-6 \\ \hline
 & (a+11)x+b+6
\end{array}
$$

나머지가 7이므로 $a+11=0$, $b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

x^3-4x^2+ax+b

$=(x+1)^2(x+k)+7$

$=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k+7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

6. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

7. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $\left(x^2-x+3\right)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$f(-1)=2$
$\left(x^2-x+3\right)f(x)=(x+1)Q(x)+R$
$x=-1$ 대입
$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

8. 다항식 $(x+2)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$을 $x-3$으로 나눈 나머지가 -3이다. 이때 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$ ② $-4x-3$ ③ $2x+3$
④ $2x-3$ ⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여
$(x+2)f(x)$에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=9$이므로 $f(1)=3\cdots$㉠
$(2x-3)f(3x-7)$에 $x=3$을 대입하면
$3f(2)=-3$이므로 $f(2)=-1\cdots$㉡
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4,\ b=7$

9. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

10. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　② ㉢　③ ㉠,㉡　④ ㉠,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots$①
$f(-1)-g(-1)=2\cdots$②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
$\therefore$ ㉠, ㉡

11. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

12. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년

$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,

$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서

$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

13. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \dfrac{1}{y} = 1$ 일 때, $\dfrac{y^{10}+1}{y^2}$ 의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \dfrac{1}{y} = 1$ 일 때

$y + \dfrac{1}{y} = 1$ 에서 $\dfrac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$ 을 곱하면 $(y+1)(y^2-y+1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

14. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

15. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x - 1, x - 2, x - 3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$