

1. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{ 미만의 } 5 \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 13 < x < 15 \text{인 홀수}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{5, 10, 15, 20\}, B = \emptyset$ 이므로
 $n(A) - n(B) = 4 - 0 = 4$

2. 다음 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 기호로 나타내어라.

$A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}, B = \{3, 9\}, C = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : $B \subset C \subset A$

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$$

$$B = \{3, 9\}$$

$$C = \{1, 3, 9\}$$

$$\therefore B \subset C \subset A$$

3. $A \subset B$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $A^c \subset B^c$

② $A \cap B^c = A$

③ $A - B = \emptyset$

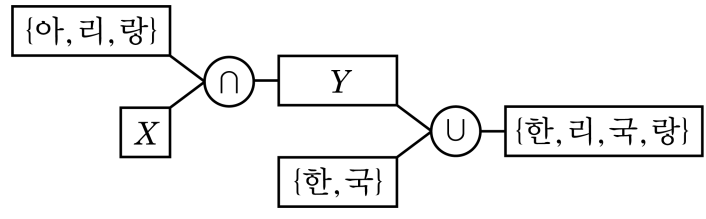
④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cap B = B$

해설

③ $A - B = \emptyset$

4. 두 집합 X, Y 의 교집합과 합집합을 다음 그림과 같이 나타내기로 한다. 이때, 만족하는 집합 Y 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : {리, 랑}

해설

$Y \cup \{\text{한, 국}\} = \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이므로 $\{\text{리, 랑}\} \subset Y \subset \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이다.
또, $\{\text{아, 리, 랑}\} \cap X = Y$ 이므로 $Y \subset \{\text{아, 리, 랑}\}$ 이다.
따라서 $Y = \{\text{리, 랑}\}$ 이다.

5. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 99 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}, B = \{x|x \text{는 } 99 \text{ 이하의 } 9 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B)$ 의 원소의 개수는?

- ① 3개 ② 9개 ③ 13개 ④ 31개 ⑤ 33개

해설

$n(A) = 33, n(B) = 11, n(A \cap B) = 11$ 이므로
 $n(A \cup B) = 33 + 11 - 11 = 33$

6. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B - A = \{8, 10\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 원소가 아닌 것은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면

$\therefore A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$
[별해] $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 이므로
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이다.
 $A = (A \cup B) - (B - A) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

7. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B^c = \{5, 6\}$, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = \{1, 2, 3, 9, 10\}$ 일 때, 집합 $B - A$ 의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \{5, 6\}$
 $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cup A^c) \cap B^c$
 $\qquad\qquad\qquad = U \cap B^c = B^c$
따라서, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
 $\therefore B - A = B - (A \cap B) = \{4, 7, 8\}$
 $\therefore$ 원소의 개수는 3개이다.

8. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 20$, $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 11$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 20 + 17 - 11 \\&= 26\end{aligned}$$

9. 다음 글을 읽고, 예진의 친구들 중 키가 150 cm 이상이고, 몸무게가 50 kg 이 안되는 친구는 모두 몇 명인지 구하여라.

성모 : 친구들 중에 키가 150 cm 이상인 친구와 몸무게가 50 kg 이상인 친구는 각각 몇 명이니?
예진 : 키가 150 cm 이상인 친구는 8 명이고, 몸무게가 50 kg 이상인 친구는 6 명이야.
성모 : 키가 150 cm 이상이고 몸무게가 50 kg 이상인 친구는 몇 명이야?
예진 : 5 명이야. 그럼 내 친구들 중에 키 150 cm 이상에 50 kg 이 안되는 친구는 모두 몇 명일까?
성모 : 명

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

성모의 친구 중 키가 150 cm 이상인 친구는 8 명, 몸무게가 50 kg 이상인 친구는 6 명이다.
따라서 예진의 친구 중 키만 150 cm 이상인 친구는 키가 150 cm 이상인 친구 8 명 중에서 몸무게가 50 kg 이상인 친구 5 명을 제외한 3 명이다.

10. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

- ① $x = 0$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.
- ③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다.
- ④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
- ⑤ $a = b$ 이고 $c = d$ 이면 $a + c = b + d$ 이다.

해설

- 역인 명제는
- ① $xy = 0$ 이면 $x = 0$ (거짓) (반례 : $x = 1, y = 0$)
 - ② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x = -1$)
 - ③ $x + y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x = 2, y = 0$)
 - ④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ (참)
 - ⑤ $a + c = b + d$ 이면 $a = b$ 이고 $c = d$ (거짓) (반례 : $a = -1, b = -2, c = 3, d = 4$)

11. 다음 중에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것을 고르면?

- ① $p : a = b, q : ac = bc$
- ② $p : a > b, q : a^2 > b^2$
- ③ $p : A \subset (B \cap C), q : A \subset (B \cup C)$
- ④ $p : x + y = 1, q : x = 2, y = -1$
- ⑤ $p : |x - 1| < 1, q : |x| < 1$

해설

$q \rightarrow p$ 가 참. 즉, 주어진 명제의 역이 참인 것을 찾는다.
① 충분조건 반례 : $c = 0, a = 1, b = 2$
② 충분조건 반례 : $a = -2, b = -1$
③ 합집합에 포함된다 하여 교집합에 포함된다고 할 수 없다.
 $(B \cap C) \subset (B \cup C)$ 이므로 $p \rightarrow q$ (충분조건)
④ 역 : $x = 2, y = -1$ 이면 $x + y = 1$ 이다.(참)
⑤ $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ 이므로 $q \Rightarrow p$

12. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad f(2n) = 2 \cdot f(n) (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\textcircled{\text{㉡}} \quad f(2n + 1) = (-1)^n \cdot 2 (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

13. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 다음 성질을 만족시킨다.

I. $f(0) = 2, f(1) = 6$
II. $g(n) = f(n+1)$
III. $f(n) = 2\{g(n+1) - g(n-1)\}$

이 때, $f(5)$ 의 값은?

- ① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

해설

II. 예서 $g(n+1) = f(n+2), g(n-1) = f(n)$
III. 예서 $f(n) = 2\{f(n+2) - f(n)\}$
 $\therefore 3f(n) = 2f(n+2)$
 $f(n+2) = \frac{3}{2}f(n)$
 $f(3) = \frac{3}{2}f(1) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$
 $f(5) = \frac{3}{2}f(3) = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$

14. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ n 이 홀수이면 $f(n) = 0$ 이다.
- ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
- ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무수히 많으므로 n 도 무수히 많다.

15. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립할 때, $2f(0) + f(2)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 이고

$f(1) = 1$ 이므로 양변에 $x = 1, y = 0$ 을 대입하면

$f(1) \cdot f(0) = f(1+0) + f(1-0)$ 에서

$f(0) = 2f(1) = 2$

또 양변에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$f(1) \cdot f(1) = f(1+1) + f(1-1)$ 에서

$1 = f(2) + f(0)$ 즉 $f(2) = -1$

따라서 $2f(0) + f(2) = 4 + (-1) = 3$

16. 두 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x - 7) = f(x + 2)$ 로 정의될 때, $g(-1)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(3x - 7) = f(x + 2)$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$$

17. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

18. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|, g(x) = x$

㉡ 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때 $f(x) = x, g(x) = x^3$

㉢ $f(x) = \frac{1}{x+2}, g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = 1, g(-1) = -1$ 이므로 $f \neq g$

㉡ $f(-1) = g(-1) = -1, f(0) = g(0) = 0,$

$f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$

㉢ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2 \text{인 모든 실수}\}$ 이고

$g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2 \text{인 모든 실수}\}$ 이므로 $f \neq g$

따라서 $f = g$ 인 것은 ㉡ 뿐이다.

19. X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $g(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 가 성립하도록 하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

두 함수가 같다는 것은 정의역의 임의의 x 값에 대하여 그 함수값이 같다는 것이다.

그러므로 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 들만을 원소로 갖는 집합이 정의역이 된다.

따라서 $2x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 1$, $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 1, 3$

따라서 1, 3을 원소로 갖는 집합을 구하면 된다.

즉, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$

20. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2$ ($\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

21. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

23. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다 8 개 더 많을 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구한 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 7 ⑤ 9

해설

부분집합의 개수는 (2 의 거듭제곱) 개이므로
2, 4, 8, 16, 32, 64, ... 이다.
이 중에서 차가 8 인 두 수는 16 과 8 이다.
 $\therefore 2^{n(A)} = 16 = 2^4, 2^{n(B)} = 8 = 2^3$
($\because n(A) > n(B)$)
 $\therefore n(A) = 4, n(B) = 3$
 $4 - 3 = 1$

24. 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 원소 c 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

$$n(X) = 2^3 = 8 \text{ (7\H)}$$

25. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답 : 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(A) = 18, n(B) = 15, n(A \cup B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$$