1. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$

② $B = \{x \mid x$는 1 보다 작은 분수$\}$

③ $C = \{x \mid x$는 3 의 배수인 짝수$\}$

④ $D = \{x \mid x$는 $2 \times n$, n은 10 보다 작은 자연수$\}$

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$이므로 유한집합이다.

② $B = \{x \mid x$는 1 보다 작은 분수$\} = \left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\right\}$ 이므로 무한집합이다.

③ $C = \{x \mid x$는 3 의 배수인 짝수$\} = \{6,\ 12,\ \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

④ $D = \{x \mid x$는 $2 \times n$, n은 10 보다 작은 자연수$\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots,\ 18\}$ 이므로 유한집합이다.

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100\}$ 이므로 유한집합이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 A 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 48 개 ② 44 개 ③ 40 개 ④ 35 개 ⑤ 32 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

짝수로만 이루어진 부분집합은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 의 부분집합 중 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는 $2^4 - 1 = 15$(개) 이다.

A 의 전체 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$(개) 이고 그 중 공집합을 제외한 것은 63 개이다.

적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 부분집합을 짝수로만 이루어진 부분집합을 제외한 것이므로 구하는 개수는 $63 - 15 = 48$(개) 이다.

3. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $n(\{1,\ 3,\ 5\}) - n(\{1,\ 5\}) = 3$

② $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.

④ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

⑤ $n(\{x \mid x$는 10의 약수$\}) = n(\{x \mid x$는 14의 약수$\})$

해설

① $3 - 2 = 1$

② 예를 들어, $A = \{0\},\ B = \{1\}$ 일 때,
$n(A) = n(B) = 1$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

④ 예를 들어, $A = \{0\},\ B = \{1,\ 2\}$ 일 때,
$n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}) = 4,\ n(\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}) = 4$

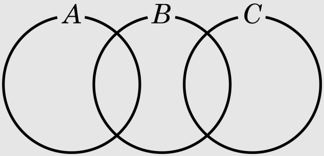
4. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 21$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cap C) = 5$, $n(C \cap A) = 0$, $n(A \cup B \cup C) = 30$ 일 때, 집합 C 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 32 개

해설

(1) $n(A \cap C) = 0$ 에서 $A \cap C = \varnothing$ 이므로 세 집합 A, B, C 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$ 이므로

$30 = 21 + 13 + n(C) - 4 - 5$

$$\begin{aligned} \therefore n(C) &= 30 - (21 + 13 - 4 - 5) \\ &= 30 - 25 \\ &= 5 \end{aligned}$$

(3) 따라서 집합 C 의 부분집합의 개수는

$\therefore 2^5 = 32$(개)

5. 축구공을 가지고 있는 학생은 15 명, 농구공을 가지고 있는 학생은 10 명, 둘 다 가지고 있는 학생이 3 명일 때, 축구공 또는 농구공을 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

① 21 명 ② 22 명 ③ 23 명 ④ 24 명 ⑤ 25 명

해설

축구공을 갖고 있는 학생과 농구공을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면, 둘 다 가지고 있는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$

$n(A \cup B) = 15 + 10 - 3 = 22$

6. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

② $A \subset B$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이다.

③ $B - A = B \cap A^c$

④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$ 이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

7. 전체집합 $U = \{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $B = \{1,3,5,9\}$, A 에 대하여 집합
$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1,3,9,10\}$ 를 만족하는 집합 A 는?

① $\{2,5\}$　　② $\{5,7\}$　　③ $\{5,10\}$

④ $\{5,7,9\}$　　⑤ $\{5,9,10\}$

해설

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$B = \{1,3,5,9\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,3,9,10\}$ 이므로 $A \cap B = \{5\}$ 이다.
따라서 집합 $A = \{5,10\}$ 이다.

8. 전체집합 $U=\{x|x$는 40이하의 자연수$\}$, $n(A)=12$, $n(B)=14$, $n(A\cap B)=5$ 일 때, $n((A\cup B)^c)$ 를 구한 것은? .

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$n(U)=40,\ n(A)=12,\ n(B)=14$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=26-5=21$
$n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)=40-21=19$

9. 미영이네 반 학생들에 대하여 수학, 영어 두 과목에 대한 선호도 조사를 실시하였다. 그 결과 수학을 좋아하는 학생은 36명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 15명이었다. 이 때, 수학 또는 영어 한 과목만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 27명 ② 30명 ③ 33명 ④ 36명 ⑤ 39명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 $n(A) = 36,\ n(B) = 27,\ n(A \cap B) = 15$이므로
$n(A \cup B) = 36 + 27 - 15 = 48$
따라서 수학 또는 영어 한 과목만을 좋아하는 학생 수는 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 48 - 15 = 33$ (명)

10. 집합 $X = \{-1,\ 1, -i,\ i\}$ 에 대하여 $f\ :\ X \to Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

11. 집합 $X=\{-1, 1\}$을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수

$f(x)=|x|, g(x)=ax-2$에 대하여 $f(-1)=g(-1)$일 때, $a+g(1)$의 값은?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

$f(-1)=g(-1)$에서 $|-1|=-a-2$, $1=-a-2$

$\therefore a=-3$

이때, $g(1)=-3-2=-5$

$\therefore a+g(1)=-3-5=-8$

12. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 $\diamond$를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m+n)$로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면

$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$

$\therefore\ m = -1,\ m = 3$

$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2+3) = f(1) = 1$

13. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0) + f(2)$의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 는 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 항상 성립하므로

$x = 1,\ y = 0$ 일 때 $f(1) \cdot f(0) = f(1) + f(1)$

$\therefore\ f(0) = 2$ $(\because\ f(1) = 1)$

$x = 1,\ y = 1$ 일 때 $f(1) \cdot f(1) = f(2) + f(0)$ 에서 $1 = f(2) + 2$

$\therefore\ f(2) = -1$

$\therefore\ 2f(0) + f(2) = 4 - 1 = 3$

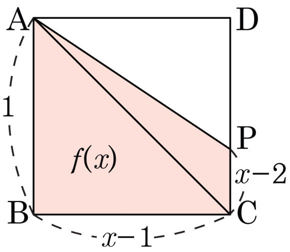
14. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

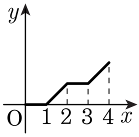
해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

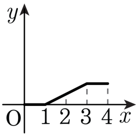
15. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



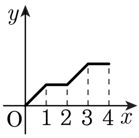
①



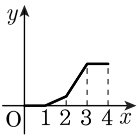
②



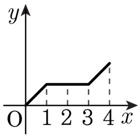
③



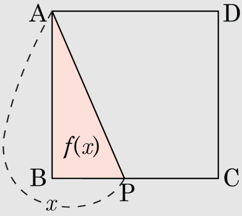
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

16. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X,Y 가 $X\cup Y=U,\ X\cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y\subset U,\ X\cup Y=U,$
$X\cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X\cup Y)=n(U)=4,\ \ X\cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ \ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ \ 2\times 6=12$

17. 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$ 에 대하여 함수 $f:X\to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,
$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3=8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$
따라서 $6\times 6=36$ 개

18. 자연수 n에 대하여 집합 $A_n = \left\{x \,\middle|\, < x > -x = \dfrac{1}{2n}\right\}$ 으로 정할 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $< x >$는 x 보다 작지 않은 최소 정수이다.)

> ㉠ 자연수 i, j에 대하여 $(i \neq j)$, $A_i \cap A_j = \phi$
> ㉡ $\dfrac{1994}{4} \in A_2$
> ㉢ $A_2 \subset A_1$
> ㉣ $-\dfrac{7}{6} \in A_3$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$< x >$ 를 k 라 하면 $k-1 < x \leq k$

$< x > -x = \dfrac{1}{2n} \leftrightarrow x = < x > -\dfrac{1}{2n}$

$A_n = \left\{k - \dfrac{1}{2n} | k\text{는 정수}\right\}$

$A_1 = \left\{\cdots - \dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2},\ \cdots\right\}$

$A_2 = \left\{\cdots - \dfrac{9}{4},\ -\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{4},\ \cdots\right\}$

$A_3 = \left\{\cdots - \dfrac{13}{6},\ -\dfrac{7}{6},\ -\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{11}{6},\ \cdots\right\}$

따라서,
자연수i, j에 대하여 $\Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

$\dfrac{1994}{4} = 498 + \dfrac{2}{4} \notin A_2,$

$-\dfrac{7}{6} \in A_3$

19. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \in 2^A$ ② $\varnothing \subset 2^A$ ③ $\{\varnothing\} \in 2^A$

④ $\{\varnothing\} \subset 2^A$ ⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다.
집합 A 의 부분집합은 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.
따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.
③ $\{\varnothing\} \notin 2^A$

20. 집합 $A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6,\ n\text{은 자연수}\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이 성립하는 n의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

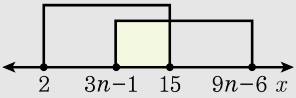
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$이므로

$A_1 \cap A_n \neq \varnothing$

$A_1 = \{x \mid 2 \le x \le 15\}$,

$A_n = \{x \mid 3n-1 \le x \le 9n+6\}$

A_1, A_n을 수직선 위에 나타낼 때 아래와 같은 꼴이어야 문제의 조건을 만족시킨다.



따라서, $3n-1 \le 15$, $n \le \dfrac{16}{3}$ $\therefore$ 최댓값은 $n=5$($\because$ n은 자연수)

21. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$ $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$
\begin{aligned}
& n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\
&= n(P_3 \cup P_4) \\
&= n(P_{3)}) + n(P_4) - n(P_{12}) \\
&= a + b - c
\end{aligned}
$$

22. 어느 학생이 x, y, z의 평균 A를 구하기 위하여 x, y의 평균 C를 먼저 구하고, C와 z의 평균 B를 구하였다. 다음 중 옳은 것은? (단, $x < y < z$)

① $B = A$　② $B < A$　③ $B > A$

④ $B \le A$　⑤ $B \ge A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3},\ C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2}+z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z-x-y}{12} = \frac{(z-x)+(z-y)}{12} > 0$$

$\therefore\ B > A$

23. a, b는 양의 상수이다. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, $x>0$, $y>0$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$ ② $4\sqrt{ab}$ ③ $a+b+2\sqrt{ab}$

④ $a+b+4\sqrt{ab}$ ⑤ $ab+3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균)≥ (기하평균)이므로

$$(x+y)\cdot 1=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$

$$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geq a+b+2\sqrt{\frac{ay}{x}\cdot\frac{bx}{y}}$$

$$=a+b+2\sqrt{ab}$$

24. 함수 $f(x)=x^2+x-2$가 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면
$f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$에서 $(x+2)$가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
1) $(x+2)$가 4의 배수일 경우 : $x=2,\ 6,\ 10$
2) $(x-1)$이 4의 배수일 경우 : $x=1,\ 5,\ 9$
$\therefore\ x=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$
따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 $3,\ 4,\ 7,\ 8$의 4개이다.
$\therefore\ a=4$

25. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{이 } 2\text{의 배수일 때})\\ n+1 & (n\text{이 } 2\text{의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$ 로 정의하자.

$f=f^1,\ f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots,\ f\circ f^n=f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10)=2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면

$f(10)=5$

$f^2(10)=f(f(10))=f(5)=6$

$f^3(10)=f(f^2(10))=f(6)=3$

$f^4(10)=f(f^3(10))=f(3)=4$

$f^5(10)=f(f^4(10))=f(4)=2$

따라서 k 의 최솟값은 5 이다.