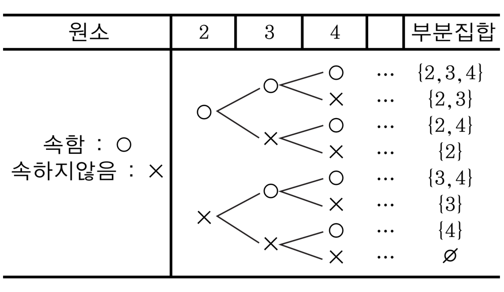
1. 다음은 집합 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합을 구하는 과정이다.
원소 2, 3, 4 중에서 원소를 골라 부분집합을 만들 때, 각 원소는 부분집합에 속하거나, 속하지 않는 2가지 경우가 생기므로 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



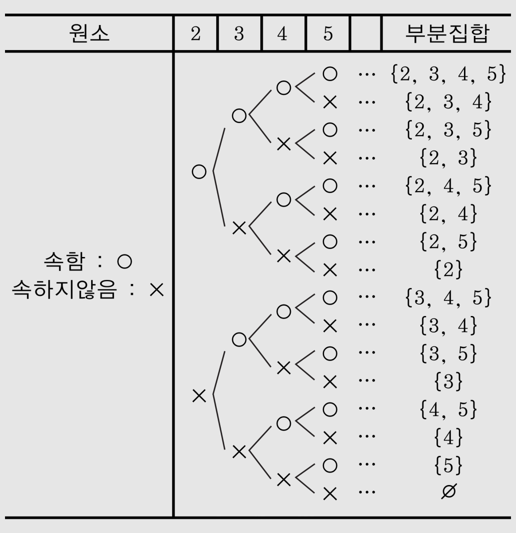
이와 같은 방법으로 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합을 모두 구해보면 다음과 같다.



따라서 부분집합의 개수는 16 개이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 20보다 작은 3의 배수}\}$ 에서 홀수는 반드시 포함하고, 18 은 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$ 이므로, $2^{(\text{홀수, 18을 뺀 원소의 개수})} = 2^{6-3-1} = 2^2 = 4(\text{개})$

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = B \cup A$　　② $A \cup \varnothing = A$

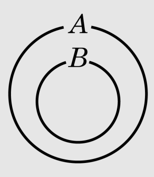
③ $(A \cap B) \subset A$　　④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$

⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

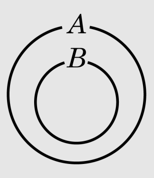
해설

③ $(A \cap B) \subset A$,$(A \cap B) \subset B$

④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$



⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$



4. 전체집합 U 의 부분집합 $A,\ B$가 $A \cap B = \varnothing$이고, $A \cap X^c = A \cap B$ 를 만족하는 X가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $A - B$　　② $(A \cup B)^c$　　③ B^c

④ $(A \cap B)^c$　　⑤ $A \cap B^c$

해설

$A \cap B = \varnothing$이고 $A \cap X^c = A \cap B$이므로

$A - X = A \cap B = \varnothing \leftrightarrow\ A \subset X\ \cdots$ ㉠

보기 중 $(A \cup B)^c$ 은 ㉠의 관계를 만족하지 않는다.

5. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$' 의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$

④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$

$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$

$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$

$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$

$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

6. 다음 명제 중 그 역이 참인 것은?

① 정삼각형은 이등변삼각형이다.

② 4 의 배수는 2 의 배수이다.

③ $x = 2$ 이면 $x^2 = 4$ 이다.

④ $ab = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.(단, a, b 는 실수)

⑤ a, b 가 모두 짝수이면 ab 가 짝수이다.(단, a, b 는 정수)

해설

④의 명제의 역을 생각해보면, $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이면 $ab = 0$ 이라는 것과 같으므로 역이 참이 된다.

7. 집합 $A = \{x \mid x$는 20 이하의 4의 배수 $\}$ 일 때, 보기를 만족하는 집합 B 의 개수는?

보기

$\{4,\ 8\} \subset B \subset A,\ n(B) = 4$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
집합 B 는 원소 4, 8 을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합이므로
$\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}, \{4,\ 8,\ 12,\ 20\}, \{4,\ 8,\ 16,\ 20\}$ 의 3 개

8. 집합 $A = \{x|x \le 12$인 자연수$\}$, $B = \{x|x$는 소수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$(A \cap B) \cap X = X,\ n(X) = 2$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$A \cap B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
$(A \cap B) \cap X = X$이므로 $X \subset (A \cap B)$
따라서 집합 X는 $A \cap B$의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합이므로
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{2,\ 11\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{3,\ 11\}$, $\{5,\ 7\}$, $\{5,\ 11\}$, $\{7,\ 11\}$ 의 10 개이다.

9. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{c,\ e\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

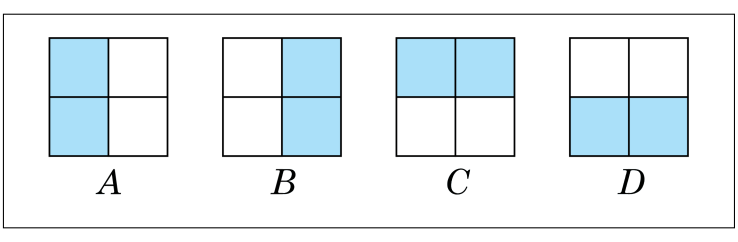
▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

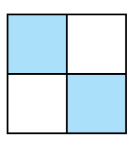
해설

집합 X 는 원소 c 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$n(X) = 2^3 = 8$ (개)

10. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



① $(A \cup B) - (A \cap B)$
② $(D \cup C) - (B \cap C)$
③ $(A \cup D) - (A \cap D)$
④ $(A - C) \cup (C - B)$
⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

11. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A = \{2, 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 을 만족시키는 집합 B의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
$= (A \cup B) - (A \cap B)$
$= (A - B) \cup (B - A)$
$= B - A$
따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로 소이므로
$A - B = \phi$, $A \subset B$
$\therefore B$는 2, 3을 포함하는 U 의 부분집합이므로 B의 개수는 $2^3 =$ 8(개)

12. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26　　② 27　　③ 28　　④ 29　　⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$
$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16 \therefore\ n(A_6) = 15$
$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25 \therefore\ n(A_4) = 22$
$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8 \therefore\ n(A_{12}) = 8$
그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

13. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. '카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.' 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시확인해야할 필요가 있는 것은?

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

① $\boxed{7}\ \boxed{u}$

② $\boxed{7}\ \boxed{k}$

③ $\boxed{2}\ \boxed{u}$

④ $\boxed{2}\ \boxed{k}$

⑤ $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{k}\ \boxed{u}$

해설

주어진 규칙의 대우는 '한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.' 이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

14. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$ 이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=4-4a<0$

$\therefore a>1$

$\therefore (a-1)+\dfrac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{9}{(a-1)}}=6$

따라서 최솟값은 6

15. 두 집합 $A = \{3, 6, a+2, 10\}$, $B = \{2 \times a, 3, b, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 에 원소 5 가 속해야 하므로 $a+2=5$ 이다. $\therefore$ $a=3$
$A = \{3, 6, 5, 10\}$, $B = \{6, 3, b, 5\}$ 에서
원소 10 이 집합 B 에 있어야 하므로 $b=10$ 이다.
따라서 $a+b=3+10=13$ 이다.

16. 세 집합 $A = \{x|x$는 10보다 작은 소수$\}$, $B = \{x|x$는 7로 나누어 나머지가 6인수$\}$,
$C = \{x|x$는 두 자리의 홀수$\}$ 가 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합일 때, $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C^c) - (A^c \cap B)$ 를 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 3, 5, 7\}$

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$,
$B = \{6, 13, 20, 27, 34, \cdots\}$,
$C = \{11, 13, 15, 17, \cdots, 99\}$ 이므로,

$$\begin{aligned} & (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C^c) - (A^c \cap B) \\ &= (A \cup B) \cup (C \cap C^c) - (B - A) \\ &= (A \cup B) - B \\ &= \{2, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

17. 세 집합 A, B, C 사이에 $A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이 성립한다. 집합 A, B, C 의 부분집합의 개수의 총합이 44 개일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이면, A, B, C 중 임의의 두 집합 사이의 교집합은 모두 공집합이다.
그러므로 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$,
$n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$ 라고 할 때 $2^a + 2^b + 2^c = 44$,
3 개의 2 의 거듭제곱수의 합이 44 가 되는 경우는 $2^2+2^3+2^5 = 4+8+32=44$ 의 한 가지 경우뿐이므로 $a+b+c=10$
따라서 $n(A \cup B \cup C) = 10$

18. 두 집합 A, B에 대하여 집합 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a, b) | \ a \in A, \ b \in B \}$ 라고 정의한다. $A \cup B$ 와 $A \cap B$의 원소의 개수가 각각 $10, 2$일 때, 집합 $A \times B$의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$\begin{aligned} n(A) + n(B) &= n(A \cup B) + n(A \cap B) \\ &= 10 + 2 = 12 \end{aligned}$$

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ 이므로

최댓값은 $n(A) = n(B) = 6$ 일 때 36이다.

19. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=1$일 때 $ab+bc+ca$의 최댓값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{2}{11}$

해설

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$이므로
$ab+bc+ca$의 최댓값은 등호가 성립하는 경우이다.
또 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로
$a+b+c=1$에서 $a=b=c=\frac{1}{3}$
$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \geq ab+bc+ca$
$\therefore ab+bc+ca$의 최댓값은
$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

20. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b| \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$\dfrac{|a|+|b|}{2} \ge \sqrt{|a||b|} \ge \dfrac{2|a||b|}{|a|+|b|}$

$\therefore \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \cdots$ ㉠

한편 $(\sqrt{2(a^2+b^2)})^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \ge 0$

$\therefore (\sqrt{2(a^2+b^2)})^2 \ge (|a|+|b|)^2$

$\therefore |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$