

1. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x - 1$

② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근

③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지

④ $x \rightarrow x^2 - 1$

⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$
따라서 함수가 아니다.

③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.

⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

2. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$

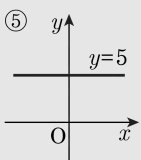
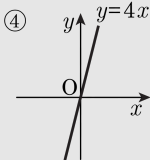
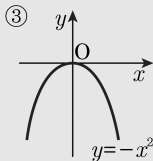
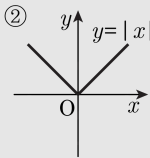
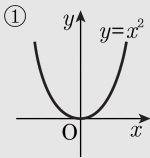
② $f(x) = |x|$

③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$

⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

4. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 가 } f^{-1}(2) = -3 \text{ 을 만족시킬 때, } f(5) \text{ 의}$$

값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

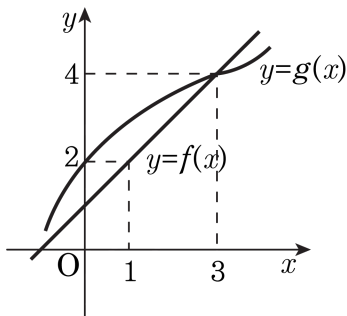
$f^{-1}(2) = -3$ 에서 $f(-3) = 2$ 이므로

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{ 이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

5. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) &= g^{-1}(f(1)) + 4 \\ &= g^{-1}(2) + 4\end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$

문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가

$(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$

이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 이 정의역인 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = -x^3 + a$ 가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 를 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

i) $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -1 + a$

$$b = -1$$

ii) $f(0) = g(0)$ 에서 $a = b$

$$a = -1$$

$$\therefore ab = (-1)(-1) = 1$$

7. 함수 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 가 x 의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$ 가 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = 0$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = 0$
④ $a = 2, b = 1$ ⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b)$$

$$= a(ax + b) + b = a^2x + ab + b \text{ 이므로}$$

x 의 모든 값에 대하여 $f \circ f = f$ 가 성립하려면

$$a^2x + ab + b = ax + b \text{가 } x \text{에 대한}$$

항등식이 되어야 한다.

$$\text{따라서 } a^2 = a \cdots \text{①,}$$

$$ab + b = b \cdots \text{②가 되어야 한다.}$$

$$\text{①에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{②에서 } ab = 0 \text{ 이므로 } a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

$$\text{그런데 } a \neq 0 \text{ 이므로 } a = 1 \text{ 이고 } b = 0$$

8. 두 함수 $f(x) = 2x+5$, $g(x) = -3x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

- ① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

9. 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 3$ 을 만족할 때, $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = 2x^2 - 12x + 15$

② $g(x) = -2x^2 + 12x + 15$

③ $g(x) = 2x^2 - 14x + 15$

④ $g(x) = -4x^2 + 14x + 15$

⑤ $g(x) = 4x^2 - 14x + 15$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) \\ &= x^2 - x + 3\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = t \text{ 라 하면 } x = -2t + 4$$

$$\therefore g(t) = (-2t + 4)^2 - (-2t + 4) + 3 = 4t^2 - 14t + 15$$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 14x + 15$$

10. 두 함수 $f(x) = 3x+2$, $g(x) = -2x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 3k + 2 &= -6x - 4 + k \\ 2k &= -6 \text{에서 } k = -3\end{aligned}$$

11. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.

12. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a > -1$
 ④ $a < 1$ ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1$, $x < 1$ 인 경우로 나누면,
 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$
 $x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
 $x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

$$\text{즉, } -2(a-1) > 0, a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

13. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(1) = 1, f(5) = 3$$

$$f(1) = 1 \text{ 에서 } a + b = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(5) = 3 \text{ 에서 } 5a + b = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

14. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)^{-1}(3) = a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3$$

$$2a - 3 = 3 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$$

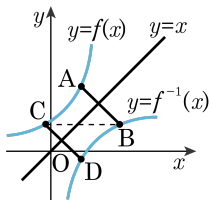
$$h^{-1}(3) = b \text{ 놓으면 } h(b) = 3$$

$$2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = h^{-1}(3) = 1$$

15. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다. 점 A의 x 좌표가 a 일 때, 점 D의 y 좌표는?(단, 점선은 x 축에 평행하다.)



- ① $-f^{-1}(a)$ ② $-f(a)$
 ③ a ④ $f^{-1}(a)$
 ⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A($a, f(a)$)로 놓으면 점 B는

점 A와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 B($f(a), a$)이다.

또, 점 C는 점 B와 y 좌표가 같으므로 C(x, a)로 놓으면 $f(x) = a$ 이므로

$$x = f^{-1}(a) \quad \therefore C(f^{-1}(a), a)$$

그런데 점 D는 점 C와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 D($a, f^{-1}(a)$)

따라서, 점 D의 y 좌표는 $f^{-1}(a)$ 이다.

16. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x) + f(1-x) = x^2 + 2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101

② -100

③ 0

④ 100

⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면

$$x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$$

$$ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 1, b = 1$$

이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$

17. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다.
 ㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n) = n + 1$ 이다.
 ㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n + 1)$ 이다.

① ㉠

② ㉡

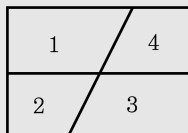
③ ㉢, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

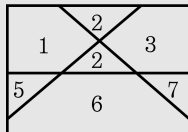
해설

㉠



위의 그림에서 $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다. (참)

㉡



한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.

즉, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, \dots$ 이므로 $f(n) = n + 1$ (참)

㉢ [반례] $f(4) = 5, g(3) = 7$ 이므로 $g(3) > f(4)$ 이다.(거짓)
 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

18. 6 명의 학생에게 쪽지시험을 보게 한 후 답안지를 서로 바꾸어서 채점을 하게 하였다. 6 명 모두 자신의 답안지를 가지지 않게 바꿀 수 있는 방법은 몇 가지인가?

① 44

② 60

③ 108

④ 126

⑤ 265

해설

6 명의 답안지를 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 로 놓는다.

i 가 가진 답안지를 $f(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 로 놓으면

$(1 - f(1))(2 - f(2))(3 - f(3))(4 - f(4))(5 - f(5))(6 - f(6)) \neq 0$ 인 일대일대응

$f: A \rightarrow A$ 의 개수를 구하는 것이다.

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 일 때,

위의 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 하면 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ $f(1) = 2$ 인 경우

다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i) $f(2) = 1$ 인 경우 : 이때, f 의 개수는 $3, 4, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 방법 이므로 그 수는 a_{n-2} 이다.

(ii) $f(2) \neq 1$ 인 경우 : $f(2)$ 는 $3, 4, \dots, n$ 의 값이 될 수 있고, 1 은 $f(3), f(4), \dots, f(n)$ 의 함수값이므로 1 은 2 로 바뀌어도 상관없다. 즉, $2, 3, \dots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 가지수이므로 그 수는 a_{n-1} 이다.

(i)(ii)에서 $f(1) = 2$ 인 경우 f 의 가짓수는 $a_{n-1} + a_{n-2}$ 이고, $f(1) = 3, 4, \dots, n$ 인 경우에도 마찬가지로 구하는 a_n 은 다음식을 만족한다.

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

$$\text{따라서, } a_3 = 2(1 + 0) = 2,$$

$$a_4 = 3(2 + 1) = 9,$$

$$a_5 = 4(9 + 2) = 44,$$

$$a_6 = 5(44 + 9) = 265$$

19. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 두 함수 f, g 가 일대일 대응이고 $f(2) = 1, g(3) = 3, (f \circ g)(1) = 2$ 일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(3) = 3$ 이고 함수 g 는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$ 이다.

만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.

그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.

따라서 $g(1) = 1$ 이다.

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고

$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$f(1) = 2, f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.

$g(1) = 1, g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5\end{aligned}$$

20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.

(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,

1은 4로 대응시킴을 의미한다.

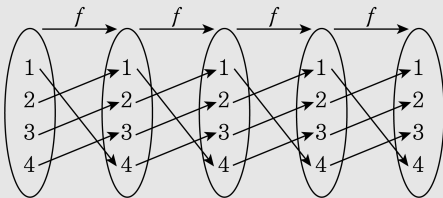
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면

4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.

$$\therefore f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$$



21. 함수 $f(x) = |x + 1| - 2$ 에서 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ $-\frac{3}{2}$

④ 1

⑤ 0

해설

$$f(x) = |x + 1| - 2 \text{ 에서}$$

$$f(f(x)) = f(|x + 1| - 2) = ||x + 1| - 2 + 1| - 2$$

$$= ||x + 1| - 1| - 2$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(f(x)) = x - 2$

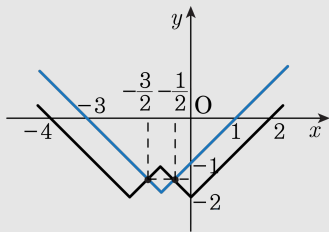
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 2$

(iii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = x$

(iv) $x < -2$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x) = x - 1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x) = -x - 3$



따라서 교점은 $x = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

22. 함수 $f(x) = 2x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{6}g(x) - \frac{1}{6}$

③ $2g(x) - 1$

④ $\frac{1}{3}g(x)$

⑤ $\frac{1}{2}g(x)$

해설

$f(x) = 2x + 1$ 에서 $y = 2x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x = \frac{y-1}{2}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{2}$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-1}{2}$$

$f(3x) = 6x + 1$ 에서 $y = 6x + 1$ 이라 놓고

x 에 대하여 정리하면 $x = \frac{y-1}{6}$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{x-1}{6}$

$$\therefore f^{-1}(3x) = g(3x) = \frac{x-1}{6}$$

$$\therefore g(3x) = \frac{1}{3} \times \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3} \cdot g(x)$$

23. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $g(0) = 5$ 가 된다. $f(2x + 1) = h(x)$ 로 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $e(x)$ 로 할 때 $e(0)$ 의 값은 ?

① 0

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(x) = f^{-1}(x), g(0) = f^{-1}(0) = 5$$

$\therefore f(5) = 0$ 문제의 조건에서

$$f(5) = f(2 \times 2 + 1) = h(2) = 0$$

또 $e(x) = h^{-1}(x)$ 이므로 $e(0) = h^{-1}(0)$

$$\therefore h(2) = 0 \text{ 이므로 } h^{-1}(0) = e(0) = 2$$