

1. ‘아름다운 대한민국’이라는 문장 속에서 자음의 집합을 A , 모음의 집합을 B 라고 할 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A = \{ \text{ㅇ, ㄹ, ㅁ, ㄷ, ㄴ, ㅎ, ㄱ} \}$ 이므로 $n(A) = 7$
 $B = \{ \text{ㅏ, ㅑ, ㅓ, ㅕ, ㅗ} \}$ 이므로 $n(B) = 5$
따라서 $n(A) - n(B) = 7 - 5 = 2$ 이다.

2. 다음에서 $B \subset A$ 인 것은?

① $A = \{x \mid x \text{는 자연수}\}, B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}, B = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$

③ $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

④ $A = \{1, 3, 9\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$

⑤ $A = \emptyset, B = \{\neg, \perp, \sqsubset\}$

해설

② 포함관계가 없다.

③ $A \subset B$

④ 포함관계가 없다.

⑤ $A \subset B$

3. 다음 중 집합 {1, 2, 4}의 진부분집합인 것을 모두 구하여라.

- ㉠

$\emptyset$
- ㉡

{1, 2}
- ㉢

$\{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$
- ㉣

$\{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉡

해설

{1, 2, 4}의 진부분집합은 {1, 2, 4}의 부분집합 중 {1, 2, 4}를 제외한 나머지 부분집합이다.

㉢ $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$ 이다. 진부분집합은 자신을 제외한 것이므로 진부분집합이 아니다.

㉣ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 따라서 {1, 2, 4}의 부분집합이 아니다.

4. $A = \{a, b, c\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 써라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 의 부분집합 : $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 8개이다.

5. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 9\}$

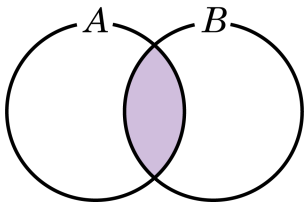
해설

$$A = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cap B = \{3, 9\}$$

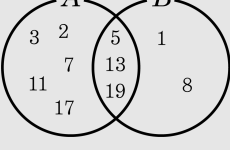
6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$, $B = \{1, 5, 8, 13, 19\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 집합은 ?



- ① {5, 13}
- ② {5, 19}
- ③ {5, 13, 19}
- ④ {1, 5, 13}
- ⑤ {1, 5, 13, 19}

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면
 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.
벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



공통부분의 원소는 {5, 13, 19} 이다.

7. 두 집합 $A = \{1, a\}$, $B = \{2, 3, a - 2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

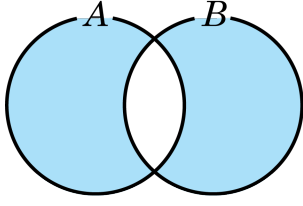
해설

두 집합 A, B 는 $A \cap B$ 를 포함한다.

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $\{1, 3\} \subset \{1, a\}$, $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a - 2\}$ 이다.

따라서 $a = 3$ 이다.

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.

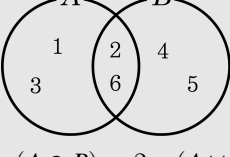


▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 이고 벤 다이어그램은 다음과 같다.



$n(A \cap B) = 2$, $n(A \cup B) = 6$
따라서 $n((A \cup B) - (A \cap B)) = 6 - 2 = 4$ 이다.

9. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{2\}$, $B \cap A^c = \{4, 6, 8\}$ 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합은?

① 18

② 20

③ 22

④ 24

⑤ 26

해설

$$A \cap B = \{2\}, B - A = \{4, 6, 8\}$$

$$\therefore B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{원소의 합} = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

10. 두 집합 $A = \{x|x\text{는 } 24\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 28\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

11. 다음 중 명제가 아닌 것은?

- ① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.
- ② 설악산은 제주도에 있다.
- ③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.
- ④ $x + 1 < 0$
- ⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x 의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

12. 다음 중 명제 ' $x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x+y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

13. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

14. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응



15. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
 $f(1) = f(3) = \cdots = f(19) = 2$
 $\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

16. 집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \subset A$

② $A \subset (A \cap B)$

③ $A \supset \emptyset$

④ $A \subset (A \cup B)$

⑤ $(A \cap B) \subset B$

해설

② $(A \cap B) \subset A$ 이므로 옳지 않다.

17. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

① $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

② $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$

③ $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$

④ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$

⑤ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

18. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

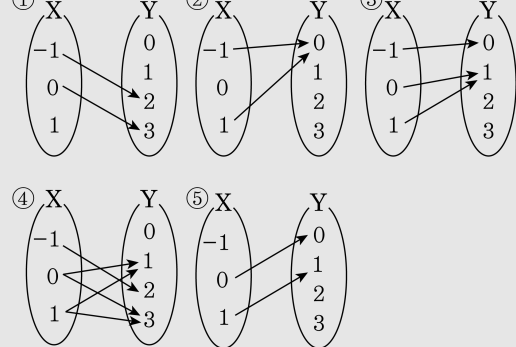
따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

19. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?
- ① $x \rightarrow x + 3$
- ② $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

20. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

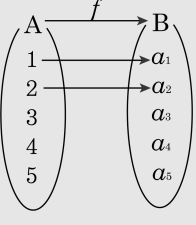
해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (개)

21. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



22. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

23. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f

② f^{-1}

③ g

④ g^{-1}

⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

24. 3학년 3반 33명의 학생 중에서 컴퓨터를 가지고 있는 학생이 25명, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생이 10명, 컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3명이다. 컴퓨터와 홈페이지를 모두 가지고 있는 학생 수는?
- ① 3명 ② 5명 ③ 7명 ④ 9명 ⑤ 11명

해설

컴퓨터를 가지고 있는 학생을 집합 A 라 하고, 자신의 홈페이지를 가지고 있는 학생을 집합 B 라 하자.
컴퓨터와 홈페이지의 어느 것도 가지고 있지 않은 학생이 3명
이므로 합집합의 원소의 개수는 $33 - 3 = 30$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$30 = 25 + 10 - x$$
$$x = 5$$

25. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x \text{에서}$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$