

1. 집합 $A = \{(x, y) | ax - by = 12\}$ 에 대하여 $(6, 2) \in A$, $(-3, -2) \in A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 26 ⑤ 30

해설

$(6, 2) \in A$ 이므로 $x = 6, y = 2$
 $6a - 2b = 12, 3a - b = 6 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $(-3, -2) \in A$ 이므로 $x = -3, y = -2$
 $-3a + 2b = 12 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하면 $b = 18$
 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에서 $3a - 18 = 6 \therefore a = 8$
 $\therefore a + b = 26$

2. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$, $B = \{a, \{b\}, \{c, \varnothing\}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 $n(A) = 6$ 이고,
 $B = \{a, \{b\}, \{c, \varnothing\}\}$ 의 원소는 3 개이므로
 $n(A) - n(B) = 3$ 이다.

3. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 32 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(정답 2개)
- ① $\emptyset \subset A$

② $16 \notin A$

③ A 는 무한집합이다.

④ $n(A) = 5$

⑤ $\{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\} \subset A$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
① $\emptyset$ 는 모든 집합의 부분집합
② $16 \in A$
③ A 는 유한집합
④ $n(A) = 6$
⑤ $\{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\} \subset A$

4. 다음 중 부분집합의 개수가 32개인 것은?

- ① {1, 2, 3}
- ② { $x \mid x$ 는 22 이하의 4의 배수}
- ③ { $x \mid x$ 는 7보다 작은 홀수}
- ④ { $x \mid x$ 는 8의 약수}
- ⑤ { $x \mid x$ 는 4 이하의 자연수}

해설

- ① $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)
- ② { $x \mid x$ 는 22 이하의 4의 배수} = {4, 8, 12, 16, 20} 이므로 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ (개)
- ③ { $x \mid x$ 는 7보다 작은 홀수} = {1, 3, 5} 이므로 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)
- ④ { $x \mid x$ 는 8의 약수} = {1, 2, 4, 8} 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)
- ⑤ { $x \mid x$ 는 4 이하의 자연수} = {1, 2, 3, 4} 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)

5. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에서 원소 0, 1 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분 집합의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$2^{(4-2)} = 2^2 = 4$$

6. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 $\{2, 5\} \subset X \subset A$ 를 만족하는 집합 X 로 옳지 않은을 모두 고르면?(정답 2개)
- ① $\{2, 3, 4\}$ ② $\{2, 3, 5\}$ ③ $\{2, 5, 7\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ $\{2, 3, 5, 7\}$

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이고, $\{2, 5\} \subset X \subset A$ 이므로 집합 X 는 $\{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 5를 반드시 포함하는 집합이다.
① $5 \notin \{2, 3, 4\}$
④ $4 \notin A$
따라서 집합 X 로 옳지 않은 것은 ①, ④이다.

7. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ 에 대하여 조건 $A \cap X = X$ 및 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$, $(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$ 따라서, $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 X 는 A 의 부분집합 중에서 $A - B = \{a_1, a_2\}$ 를 포함하므로 A 의 부분집합 중에서 a_1, a_2 를 모두 포함하는 것의 개수이므로
 $\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

8. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 반드시 포함하고 n 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16개 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$2^{(1, 2, n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-3} = 16 = 2^4 \quad \therefore n = 7$$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?(단, $U \neq \emptyset$)

① $A \cup B = B$

② $A \cap B = A$

③ $(A \cap B)^c = B^c$

④ $B^c \subset A^c$

⑤ $A - B = \emptyset$

해설

- ③ $A \subset B$ 이면 A 와 B 의 교집합이 A 이므로 $A^c = B^c$ 라는 식으로 되는데 $A \subset B$ 인 경우 항상 성립하지는 않는다.

10. 두 집합 A, B 가 각각 공집합이 아닐 때, <보기>에서 서로소인 것은 모두 몇 개인가?

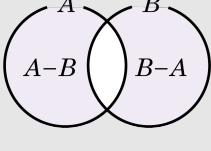
보기

- $\supsetneq A$ 와 $A \cup B$
- $\supsetneq A - B$ 와 B
- $\supsetneq B - A$ 와 A
- $\supsetneq A - B$ 와 $B - A$

- ① 없다.
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 3 개
- ⑤ 4 개

해설

$\supsetneq, \supsetneq, \supsetneq$ 3개이다.



11. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, a, a + 1\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 일 때 집합 B 의 원소의 합을 구하면?(정답 2개)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4$ 이거나 $a + 1 = 4$ 여야 한다.

i) $a = 4$ 일 때

$B = \{2, 4, 5\}$, 원소들의 합은 11

ii) $a + 1 = 4$ 즉 $a = 3$ 일 때

$B = \{2, 3, 4\}$, 원소들의 합은 9

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = A$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B \subset A$

② $(A \cup B) \subset A$

③ $A \subset B$

④ $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다.

② $(A \cup B) \subset A, A \subset (A \cup B)$ 둘 다 성립한다.

③ $B \subset A$ 이므로 옳지 않다.

④ $A \cap B = B, A \cup B = A$ 이므로
 $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A$

13. 우리 반 학생 56명 중에서 제주도에 가 본 학생이 35명, 일본에 가 본 학생이 21명, 제주도에도 일본에도 가 보지 못한 학생이 8명일 때, 제주도와 일본에 모두 가 본 학생을 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 8 명

해설

제주도에 가 본 학생을 집합 A 라 하고, 일본에 가 본 학생을 집합 B 라 하자.

제주도에도 일본에도 가 보지 못한 학생이 8 명이므로 $n(A \cup B) = 56 - 8 = 48$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$48 = 35 + 21 - x$$

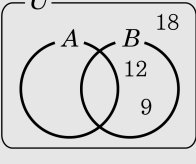
 $x = 8$ 이다.

그러므로 제주도와 일본에 모두 가 본 학생, 즉 $n(A \cap B) = 8$

14. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B - A = \{9, 12\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{18\}$ 일 때, 집합 A 는?
- ① $\{3, 6, 9\}$ ② $\{3, 6, 12\}$ ③ $\{3, 6, 15\}$
④ $\{6, 12, 15\}$ ⑤ $\{12, 15, 18\}$

해설

$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 이므로
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으
로 $A = \{3, 6, 15\}$ 이다.



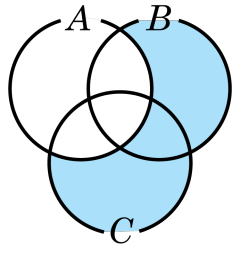
15. 임의의 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

- ① $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
- ② $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$
- ③ $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
- ④ $A - (B - C) = (A - B) \cup (A - C)$
- ⑤ $(A^c - B)^c = A \cup B$

해설

- ① $(A - B) - C = (A \cap B^c) \cap C^c$
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C) \quad \therefore (\text{참})$
- ② $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$
 $= A \cap (B \cup C)^c$
 $= A - (B \cup C) \quad \therefore (\text{참})$
- ③ $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$
 $= A - (B \cap C) \quad \therefore (\text{참})$
- ④ $A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap (B^c \cup C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C) \quad \therefore (\text{거짓})$
- ⑤ $(A^c - B)^c = (A^c \cap B^c)^c$
 $= A \cup B \quad \therefore (\text{참})$

16. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A - (B \cup C)$
- ② $A \cap (B \cup C)$
- ③ $(A \cap B) - C$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $A - (B \cap C)$

해설

①

②

③

⑤

17. 38 명의 학생 중에서 축구를 좋아하는 학생이 27 명, 농구를 좋아하는 학생이 19 명이다. 두 가지 운동을 모두 좋아하는 학생이 16 명 일 때, 축구만 좋아하는 학생 수를 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답 : 11 명

해설

학생 전체를 전체집합 U , 축구를 좋아하는 학생들의 집합을 집합 A , 농구를 좋아하는 학생들의 집합을 집합 B 라 하면, 두 가지 운동을 모두 좋아하는 학생들의 모임은 $A \cap B$ 이고, 축구만 좋아하는 학생들의 모임은 $A - B$ 이다. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 27 - 16 = 11$

18. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

- ① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

$\therefore Q \subset P, Q \subset R$ 이므로 $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ (참)

19. 두 조건 $p: 2 \leq x < 5$, $q: a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P , 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

20. 두 조건 $p : x - 2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$ 에서 $q \rightarrow p$ 가 참일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$ 가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$

21. 선영, 나영, 해영은 세 자매이다. 세 사람은 자신들을 소개하는 자리에서 다음과 같이 말하였다.

선영 : 나는 둘째이다.
나영 : 나는 둘째가 아니다.
해영 : 나는 셋째가 아니다.

위의 세 명의 말 중 하나만 참일 때, 첫째, 둘째, 셋째를 차례로 나타낸 것은?

- ① 선영, 해영, 나영

② 해영, 나영, 선영

③ 해영, 선영, 나영

④ 나영, 해영, 선영

⑤ 나영, 선영, 해영

해설

선영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 둘이 되므로 모순
나영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 없으므로 모순
해영이의 말이 진실이라고 가정하면 해영은 셋째가 아닌데 나영이가 둘째이므로 해영이가 첫째 선영이는 둘째가 아니므로 선영이가 셋째가 되어 모순이 없다.
∴ 해영이가 진실을 말하고 있으며, 해영이가 첫째, 나영이는 둘째, 선영이는 셋째이다.

22. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \cap B = B$

② $A \cap B^c = B$

③ $A \cup B = U$

④ $A - B = \emptyset$

⑤ $B - A = U$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B = A \cap B = A \\ & A \subset B \text{ 이므로 } A \cap B^c = \emptyset \text{ 이면} \\ & A \subset B \text{ 이므로 필요충분조건은 ④이다.} \end{aligned}$$

23. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 $(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a})$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a}) = 144a^2 + \frac{1}{a^2} + 30 \geq 2\sqrt{144a^2 \times \frac{1}{a^2}} + 30 = 30 + 24 = 54$$

24. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

25. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기 중 함수 $f : X \rightarrow X$ 로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

- ㉠ $f(x) = -x$
- ㉡ $f(x) = x^2$
- ㉢ $f(x) = |x|$
- ㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$
- ㉥ $f(x) = \sqrt{x}$

- ① 1 개
- ② 2 개
- ③ 3 개
- ④ 4 개
- ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = -1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉡ $f(x) = x^2$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉢ $f(x) = |x|$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 에서 $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.

㉥ $f(x) = \sqrt{x}$ 에서 $f(-1) = i \notin X$ 이므로 함수가 아니다.

따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

26. $f(2x-1) = \frac{x-5}{x-1}$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② $\frac{7}{2}$ ③ 0 ④ -5 ⑤ -7

해설

$2x-1 = -1$ 에서 $x = 0$
 $\therefore f(-1) = 5$

27. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$f(0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$

$\therefore f(0) = 0$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$-f(2) - f(-1) = 3$

$\therefore f(2) + f(-1) = -3$

$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$

$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(n) = (n^3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$1^3 = 1$
즉 나머지 : 1
 $2^3 = 7 \times 1 + 1$
즉 나머지 : 1
 $3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$
즉 나머지 : 6
 $4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$
즉 나머지 : 1
 $5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6$
즉 나머지 : 6
따라서 치역은 {1, 6}
 $\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

29. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 이고,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases}$$

이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중

맞는 것은?(Q 는 유리수 전체의 집합)

- ① 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ② 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다
- ③ 부등식 $y \geq x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.
- ④ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ⑤ 부등식 $y < x(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y 값이 0, 1 인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.

따라서 부등식 $y \geq x, y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

30. 자연수 n 에 대하여 $n(n+1)(n+2)$ 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(1) = 6, f(2) = 4$ 이다. 이 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$$n = 1 \text{ 이면 } 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \therefore f(1) = 6$$

$$n = 2 \text{ 이면 } 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad \therefore f(2) = 4$$

$$n = 3 \text{ 이면 } 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \quad \therefore f(3) = 0$$

$$n = 4 \text{ 이면 } 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \quad \therefore f(4) = 0$$

$$n = 5 \text{ 이면 } 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \quad \therefore f(5) = 0$$

$$n = 6 \text{ 이면 } 6 \cdot 7 \cdot 8 = \times \times 6 \quad \therefore f(6) = 6$$

$$n = 7 \text{ 이면 } 7 \cdot 8 \cdot 9 = \times \times 4 \quad \therefore f(7) = 4$$

$$n = 8 \text{ 이면 } 8 \cdot 9 \cdot 10 = \times \times 0 \quad \therefore f(8) = 0$$

⋮

따라서 6, 4, 0, 0, 0 이 반복하여 나타남을 알 수 있다.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = (6 + 4 + 0 + 0 + 0) \times 4 = 40$$

31. 집합 A 에 대하여 함수

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases} \text{로 정의한다.}$$

$f_A \cap B^c(x) = 1$ 일 때, 다음 <보기> 중 그 값이 항상 1이 되는 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ☐ (가) $f_A(x) + f_B(x)$
- ☐ (나) $f_A(x) - f_B(x)$
- ☐ (다) $f_A(x)f_B(x)$

- ☐ ① (가)
- ☐ ② (나)
- ☐ ③ (다)
- ☒ ④ (가), (나)
- ☐ ⑤ (나), (다)

해설

$x \in A \cap B^c$ 이므로 $x \in A, x \notin B$
따라서 $f_A(x) = 1, f_B(x) = 0$

32. 함수 f 가 임의의 양수 m, n 에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$ 의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{2006\text{번}}) \\ &= \underbrace{f(2) + f(2) + \cdots + f(2)}_{2006\text{번}} \\ &= 2006f(2) = 2006 \end{aligned}$$

33. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x) - y = x - f(y) + 1$ 을 만족시키는 함수 f 에 대하여 $f(1)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$f(x) + f(y) = x + y + 1$$

$$x = y = 1 \text{ 일 때, } f(1) + f(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{3}{2}$$

34. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 이고 $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립하므로,

$x = 1, y = 0$ 을 대입하면

$$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = f(1) + f(1) = 2$$

35. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

36. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로
 $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.
따라서 $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$
 $= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

37. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a$, $g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

정의역 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로

$f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 가 성립한다.

$f(1) = g(1)$ 에서 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$

$\therefore a - b = -1 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) = g(2)$ 에서 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$

$\therefore a - 2b = -5 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 4$

$\therefore a + b = 7$

38. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

39. 두 집합 $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의
두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a , b
의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로
 $f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.
 $-a - b = -3$, $a - b = 1$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$
 $\therefore a + b = 3$

40. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

41. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 일대일 대응 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f: A \rightarrow B$ 가 일대일대응이라면 3 은 a_3, a_4, a_5 중 하나의 원소와 대응하고, 4 는 나머지 두 가지 원소중의 하나와 대응하여야 한다. 또 5 는 3, 4 가 대응하고 남은 원소와 대응하게 되므로 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$

42. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

- ① 2 가지
- ② 3 가지
- ③ 6 가지
- ④ 8 가지
- ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{2}$

①, ②을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

43. 집합 $A = \{(a, b) \mid a \times b = 9, a, b \text{는 자연수}\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를
바르게 구한 것은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$ 이다.
 $\therefore n(A) = 3$

44. 집합 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) = 0$

② $0 \in A$

③ $\{\emptyset\} \notin A$

④ $\emptyset \in A$

⑤ $\{0\} \subset A$

해설

집합 A 의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 이므로

① $n(A) = 3$

② $0 \notin A$

③ $\{\emptyset\} \in A$

⑤ $\{0\} \not\subset A$

45. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- $\supsetneq$

$n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- $\supseteq$

$A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
- $\subseteq$

$n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

- ①

$\supsetneq$
- ②

$\supseteq$
- ③

$\subseteq$
- ④

$\supseteq, \subseteq$
- ⑤

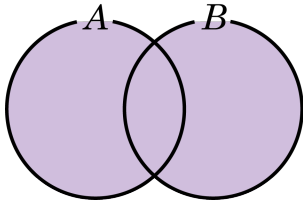
$\supsetneq, \supseteq, \subseteq$

해설

$\supsetneq$ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

$\subseteq$ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

46. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 24\}$, $B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
 $B = \{4, 8, 16, 32, 64, 96\}$ 이 된다.
색칠한 부분의 원소는 $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96\}$ 이다.
이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

47. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구한 것은?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 X 는 원소 1, 2, 3, 6 을 포함하는
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ 의 부분집합이므로
(집합 X 의 갯수) $\equiv 2^{8-4} = 2^4 = 16(\text{개})$

48. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳지 않은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.
- ㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- ㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.
- ㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.
- ㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

해설

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$ 이다.
- ㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.
- ㉣ $U^c = \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
- ㉤ $A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

49. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 7\text{미만의 자연수}\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$ 에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$
 $(B - A) \cup X = X$ 이므로 $(B - A) \subset X$,
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$,
 $\{7, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
따라서, 집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로
 $2^{8-2} = 2^6 = 64$ (개)이다.

50. $U = \{x|0 \leq x < 15, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x|x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로
 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$
 $= n((A - B) \cup (B - A))$
 $= n(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}) = 10$ 이다.