

1. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n = (\text{나})$ (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

- ① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k + 1$
④ 역, $2k + 1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』의 대우는 ‘ n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.’

∴ (가)-대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$

∴ (나)- $2k$

2. $q > p > 1$ 인 실수 p, q 에 대하여 $pq + p$ 와 $p^2 + q$ 의 대소를 비교하면?

① $pq + p < p^2 + q$

② $pq + p \leq p^2 + q$

③ $pq + p > p^2 + q$

④ $pq + p \geq p^2 + q$

⑤ $pq + p = p^2 + q$

해설

$$\begin{aligned}(pq + p) - (p^2 + q) &= pq - q - p^2 + p \\ &= q(p - 1) - p(p - 1) \\ &= (p - 1)(q - p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$ 이므로 $p - 1 > 0$, $q - p > 0$

따라서 $(p - 1)(q - p) > 0$ 이므로

$$pq + p > p^2 + q$$

3. $0 < a < 1$ 일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$

② $R < Q < P$

③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$

⑤ $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때 $a > 0$, $2-a > 0$, $1-a > 0$ 이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉, $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때 $a > 0$, $2+a > 0$, $a-2 < 0$, $a+1 > 0$ 이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉, $P > R$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} &= \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)} \\ &= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)} \end{aligned}$$

이 때 $2-a > 0$, $2+a > 0$, $a^2-a+2 > 0$ 이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$ 이다.

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
 ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
 ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

5. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

6. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x \geq 0, y \geq 0$

⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii)에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

7. 다음은 명제 「 x, y 가 정수일 때 xy 가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 결론을 부정하여 (가)이면 $x = 2m + 1, y = (나)$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① x 또는 y 가 짝수, $2n$
- ② x, y 중 하나만 짝수, $2n$
- ③ x, y 중 하나만 홀수, $2n + 1$
- ④ x, y 모두 홀수, $2n + 1$
- ⑤ x, y 모두 짝수, $2n + 1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y 가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m + 1$, (나): $y = 2n + 1$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

8. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때 1 , $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

② $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $1 < \sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

먼저 주어진 식을 각각 제곱하면

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{b-a})^2 = b - a$$

이 때 $1 = a + b$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ 을 대입하여

크기를 예상하여 두 식의 차를 알아보면

$$(a + b + 2\sqrt{ab}) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore 1 = a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$(a + b) - (b - a) = 2a > 0$$

$$\therefore b - a < a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$(b - a) - (a + b - 2\sqrt{ab})$$

$$= -2a + 2\sqrt{ab}$$

$$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$$

$$\therefore a + b - 2\sqrt{ab} < b - a \cdots \textcircled{\text{㉢}}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

9. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

$$\text{이 때 } 2^{50} > 5^{10n} \text{ 이므로 } \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2$$

n 의 갯수는 2 개이다.

10. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

11. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$(|a| + |b| + |c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$

$|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$

$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

12. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉞] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
 &= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
 &= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\
 &= \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ [㉞]} \geq 0
 \end{aligned}$$

- ① $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
 ② $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
 ③ $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2$
 ④ $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
 ⑤ $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$

해설

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \{ (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \} \\
 &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2
 \end{aligned}$$

13. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수 (절대부등식)

㉢ $x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$
 $\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 4$

㉣ $x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수 (절대부등식)

14. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

㉡ $x^2 + 4x \geq -4$

㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉤ $x^2 \geq 0$

㉥ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$

$= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$

$(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

㉤ $x^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

㉥ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$

$\rightarrow \text{절대부등식}$

따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

15. 다음은 명제 ' $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...

m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다.

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로 } n^2 \text{ 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.}$$

따라서 $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. ... ㉠

한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,

$$n = 3k \text{ 이면 } n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

$$n = 3k + 1 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$n = 3k + 2 \text{ 이면 } n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ 이므로, } n^2 \text{ 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.}$$

따라서, $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ... ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.

따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

16. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$$1, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \sqrt{b} - \sqrt{a}, \quad \sqrt{b-a}$$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
 ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + 2\sqrt{ab} + b - 1 \\ &= 2\sqrt{ab} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &> 1 \\ \therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} &> 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad 1^2 - (\sqrt{b-a})^2 &= 1 - b + a \\ &= (a+b) - b + a \\ &= 2a > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 &= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a) \\ &= 2\sqrt{ab} - 2a \\ &= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0 \\ \therefore \sqrt{b-a} &> \sqrt{b} - \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\text{(i)}, \text{(ii)}, \text{(iii)} \text{에서 } \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

17. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉣ $|x + y| \geq |x - y|$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x > -1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)

㉢ $(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $= 2(|xy| + xy) \geq 0$

$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때

$|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로

$|x + y| < |x - y|$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

18. 어느 학생이 x, y, z 의 평균 A 를 구하기 위하여 x, y 의 평균 C 를 먼저 구하고, C 와 z 의 평균 B 를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?
(단, $x < y < z$)

① $B = A$

② $B < A$

③ $B > A$

④ $B \leq A$

⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3}, C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z-x) + (z-y)}{12} > 0$$

$$\therefore B > A$$

19. $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ 인 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$ 를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$ 가 가질 수 있는 값의 범위는?

- ① $1 < k \leq \frac{4}{3}$ ② $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ③ $0 < k < 2$
 ④ $0 < k \leq 2$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1$, $y < 1$ 에서 $1 - x > 0$, $1 - y > 0$ 이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
 양변에 $x + y - 1$ 을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$$

마찬가지방법으로 yz , zx 를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

또, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ 에서 ($\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$
 에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$ 를 더한다)

$$4 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$$

20. 다음의 I, II에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

I. $p : ab < 0$

q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이 동시에 성립한다.

II. $p : a + b - 1 < 0$

q : 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖는다.

a, b 가 실수일 때, I, II에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

I. q 의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는

$$a - b > 0 \text{ 이고 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0 \text{ 에서 } ab < 0 \text{ 이고}$$

$a > b$ 이므로

$$a > 0, b < 0$$

역으로, $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이고

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0, b < 0$ 이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0, b > 0)$ 또는 $(a > 0, b < 0)$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

II. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$$D = a^2 + 4b < 0, P = \{(a, b) | a + b - 1 < 0\}$$

$Q = \{(a, b) | a^2 + 4b < 0\}$ 라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.

