1. 좌표평면 위의 점 $A(3,-2)$, $B(4,5)$, $C(-1,3)$을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

$\therefore\ x=-2,\ y=-4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-2,-4)$

2. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\qquad), k < (\qquad)$$

▶ 답:

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

3. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 한국 사람들의 모임
② 9 이하의 짝수의 모임
③ 10 과 17 사이의 수 중 분모가 2 인 기약분수의 모임
④ 3 보다 조금 큰 수의 모임
⑤ 5 로 나누었을 때 나머지가 4 인 자연수의 모임

해설
④ '조금' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

4. 두 집합 $A=\{x,\ y,\ \{x,\ y,\ \varnothing\}\}$, $B=\left\{x \mid x\text{는 9의 약수}\right\}$ 일 때, $n(A)-n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$A=\{x,\ y,\ \{x,\ y,\ \varnothing\}\}$,
$B=\left\{x \mid x\text{는 9의 약수}\right\}=\{1,\ 3,\ 9\}$ 에서
$n(A)=3$ 이고, $n(B)=3$ 이므로
$n(A)-n(B)=0$ 이다.

5. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A \cup B) = 26$ 일 때, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$ 이면 $n(A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$26 = n(A) + 15 - 8$

$\therefore\ n(A) = 19$

6. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$　② $p \rightarrow q$　③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$　⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'

$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$(참)

$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$(참)

7. $a>0$일 때, $2a+\frac{1}{2a}$의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a>0$이므로 $2a>0$산술기하평균의 관계로부터

$2a+\frac{1}{2a} \geq 2\cdot\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$

8. 실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 다음 중 R에서 R로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$　② $y = -x + 4$　③ $y = (x-1)^2$

④ $x = y^2 + 4$　⑤ $y = x^3$

해설

4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$에서 $y = \pm 1$

즉, $x = 5$에 대응하는 y의 값이

-1, 1의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

9. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서

기울기$= a + 2 = \tan 45° = 1$

$\therefore\ a = -1$

y 절편 $-a + b = 4$

$\therefore\ b = 3$

$\therefore\ a + b = 2$

10. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0} = \dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a = 7$

11. 직선 $3x+4y=0$ 에 평행하고, 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식을 모두 고르면?

① $3x+4y+6=0$　② $3x+4y+8=0$

③ $3x+4y+10=0$　④ $3x+4y-8=0$

⑤ $3x+4y-10=0$

해설

$y=-\frac{3}{4}x$ 에 평행하므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$ 이다.

$\Rightarrow \quad y=-\frac{3}{4}x+k \quad \Rightarrow \quad 3x+4y+4k=0$

원점에서 거리가 2 이므로 $\frac{|4k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

$\therefore\ k=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow \quad 3x+4y+10=0,$

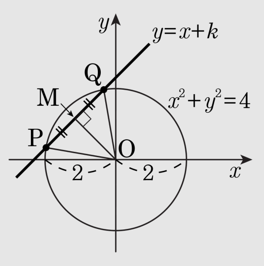
$3x+4y-10=0$

12. 직선 $y = x + k$가 원 $x^2 + y^2 = 4$에 의하여 잘린 현 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 2일 때, k의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$　　② $\pm\sqrt{6}$　　③ $\pm\sqrt{7}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$　　⑤ ± 3

해설



$\overline{\mathrm{PQ}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{PM}} = 1$

원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{\mathrm{OP}} = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{PM}^2}$

$= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

이때 원과 직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OM}}$의 길이와 같으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3},\ |k| = \sqrt{6}, k = \pm\sqrt{6}$

13. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

14. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 (1, 1) 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$

즉, $12x+5y+k=0$

이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$

$\frac{|17+k|}{13}=2$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm 26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$9+(-43)=-34$

15. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(-1,\ 1)$
④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $O(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $A(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $P(1,\ 1)$ 이다.

16. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y=f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y=-f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병 ② 갑, 을, 정 ③ 갑, 병, 정
④ 을, 병, 정 ⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참
병 : $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$: 원점 대칭
$\therefore\ y=f(x) \rightarrow -y=f(-x)$: 거짓

17. 전체집합 U의 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B$를 간단히 하면?

① $A\cap B$　② $A-B$　③ B　④ $A\cup B$　⑤ A

해설

$\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$=\{A\cap(B^c\cup B)\}\cap B$
$=A\cap B$

18. 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,
$\dfrac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$
$|2a| = |-b|$,$ab < 0$ 이므로
$2a = -b$, $\therefore\ b = -2a$
따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b} = \dfrac{2a+2a}{a-2a} = \dfrac{4a}{-a} = -4$

19. 두 정점 A(−1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle$PBA 의 최대 크기는 60° 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 A(−1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는 $(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle$PBA 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

20. 실수 전체의 집합 R의 부분집합 S에 대하여 $P = \{x | -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2},\ x \in S\}$이라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, Q, Z, N은 각각 유리수, 정수, 자연수의 집합이다.)

① $S = R$ 이면 P 는 공집합이다.

② $S = R$이면 P는 유한집합이다.

③ $S = Q$이면 P는 유한집합이다.

④ $S = Z$이면 P는 유한집합이다.

⑤ $S = N$이면 P는 무한집합이다.

해설

$-\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2}$ 에서 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ 이므로 $S = R$ 이거나, $S = Q$ 이면 P 는 무한집합, $S = Z$ 이면 $P = \{0,\ 1\}$ 이므로 P는 유한집합, $S = N$ 이면 $P = \{1\}$이므로 P는 유한집합이다.

21. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

(등호 성립조건은 $a = b = c$)

22. 두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

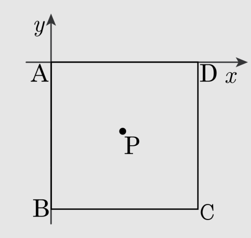
$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

23. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

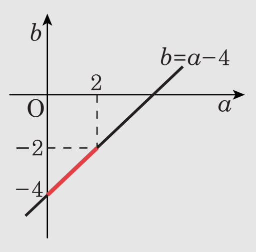
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A$(0,\ 0)$, B$(0,\ -2)$,
D$(2,\ 0)$, P$(a,\ b)$라고하면 $2\cdot\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$이므로



$2\cdot(a^2+b^2)$
$= a^2+(b+2)^2+(a-2)^2+b^2$
$0 = b-a+4$
$\therefore$ P$(a,\ b) = (a,\ a-4)$
점 P의 자취는 $b = a-4\ (0 < a < 2)$와 같으므로
구하는 길이는 두 점 $(0,\ -4)$아 $(2,\ -2)$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore\ \sqrt{(2-0)^2+(-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$



24. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$
④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

25. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] + \left[-\frac{1}{2}x+1\right]$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f \circ f^1, f^3 = f \circ f^2, \cdots, f^n = f \circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \cdots$ 을
차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$f^1(3) = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}+1\right] = 1 + \left[-\frac{1}{2}\right] = 1 - 1 = 0$

$\therefore f^1(3) = 0$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = [0] + [1] = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f^2(3) = 1$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

$\therefore f^3(3) = 0$

$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$

$\therefore f^4(3) = 1$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이
짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.

$\therefore f^{2006}(3) = 1$