

1. 좌표평면 위의 점 $A(3, -2)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 $ABCD$ 의 나머지 꼭짓점 D 의 좌표를 (x, y) 라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ $ABCD$ 는 평행사변형이므로

대각선 AC 의 중점과 대각선 BD 의 중점이 일치한다.

점 D 의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 3}{2} \right) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{5 + y}{2} \right)$$

$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D 의 좌표는 $(-2, -4)$

2. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

3. 다음 중 집합이 아닌 것은?

- ① 한국 사람들의 모임
- ② 9 이하의 짝수의 모임
- ③ 10 과 17 사이의 수 중 분모가 2 인 기약분수의 모임
- ④ 3 보다 조금 큰 수의 모임
- ⑤ 5 로 나누었을 때 나머지가 4 인 자연수의 모임

해설

④ ‘조금’ 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

4. 두 집합 $A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\} \text{ 에서}$$

$$n(A) = 3 \text{ 이고, } n(B) = 3 \text{ 이므로}$$

$$n(A) - n(B) = 0 \text{ 이다.}$$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 26$ 일 때, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$ 이면 $n(A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$26 = n(A) + 15 - 8$$

$$\therefore n(A) = 19$$

6. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$

② $p \rightarrow q$

③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

‘명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.’

$$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \text{역} : \sim q \rightarrow \sim p (\text{참})$$

$$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow \text{대우} : p \rightarrow q (\text{참})$$

7. $a > 0$ 일 때, $2a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

8. 실수 전체의 집합을 R 이라 할 때, 다음 중 R 에서 R 로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$

② $y = -x + 4$

③ $y = (x - 1)^2$

④ $x = y^2 + 4$

⑤ $y = x^3$

해설

4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$ 에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$ 에 대응하는 y 의 값이
 $-1, 1$ 의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

9. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▶ 정답: 2

해설

$$\begin{aligned} & y = (a+2)x - a + b \text{ 에서} \\ & \text{기울기} = a+2 = \tan 45^\circ = 1 \\ & \therefore a = -1 \\ & y \text{ 절편 } -a + b = 4 \\ & \therefore b = 3 \\ & \therefore a + b = 2 \end{aligned}$$

10. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow a = 7$$

11. 직선 $3x + 4y = 0$ 에 평행하고, 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식을 모두 고르면?

① $3x + 4y + 6 = 0$

② $3x + 4y + 8 = 0$

③ $3x + 4y + 10 = 0$

④ $3x + 4y - 8 = 0$

⑤ $3x + 4y - 10 = 0$

해설

$y = -\frac{3}{4}x$ 에 평행하므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$ 이다.

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + k \Rightarrow 3x + 4y + 4k = 0$$

$$\text{원점에서 거리가 2 이므로 } \frac{|4k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$$\therefore k = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow 3x + 4y + 10 = 0,$$

$$3x + 4y - 10 = 0$$

12. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$ 의 길이가 2일 때, k 의 값은?

① $\pm \sqrt{5}$

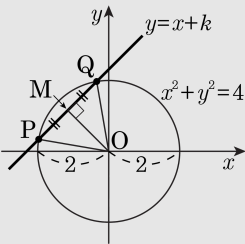
② $\pm \sqrt{6}$

③ $\pm \sqrt{7}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$

⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$ 이므로 $\overline{PQ}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$
 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } \overline{OM} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PM}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

이때 원과 직선 $x - y + k = 0$
 사이의 거리는 $\overline{OM}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}, |k| = \sqrt{6}, k = \pm \sqrt{6}$$

13. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

14. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1, 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$$|k + 17| = 26$$

$$k + 17 = \pm 26$$

$$\therefore k = 9 \text{ 또는 } k = -43$$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$$9 + (-43) = -34$$

15. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① (1, 1)

② (1, 2)

③ (-1, 1)

④ (-1, -1)

⑤ (1, -1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면

두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.

포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $O(0, 0)$ 이고

포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $A(2, 2)$ 이다.

이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $P(1, 1)$ 이다.

16. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다.
올바르게 말한 사람은?

갑: 점 (x, y) 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여
 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b) = 0$ 이
나타내는 도형으로 이동 한다.

을: 점 (x, y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여
점 $(2, -1)$ 은 점 $(0, 0)$ 으로 이동한다.

병: 점 (x, y) 를 점 $(-x, -y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y =$
 $f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y = -f(-x)$ 이 나타내는 도형으
로 이동한다.

정: 점 (x, y) 를 점 (y, x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x, y) =$
 0 이 나타내는 도형은 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형으로
이동한다.

① 갑, 을, 병

② 갑, 을, 정

③ 갑, 병, 정

④ 을, 병, 정

⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참

병 : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$: 원점 대칭

$\therefore y = f(x) \rightarrow -y = f(-x)$: 거짓

17. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B$ 를 간단히 하면?

- ① $A \cap B$ ② $A - B$ ③ B ④ $A \cup B$ ⑤ A

해설

$$\begin{aligned} & \{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cap B \\ &= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

18. 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때,
 $\frac{2a - b}{a + b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$|2a| = |-b|$, $ab < 0$ 이므로

$$2a = -b, \therefore b = -2a$$

$$\text{따라서, } \frac{2a - b}{a + b} = \frac{2a + 2a}{a - 2a} = \frac{4a}{-a} = -4$$

19. 두 정점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
 ㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
 ㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0, 0)$ 과 $(-4, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 로 나타낼 수 있다.

삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다. 따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.

$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA) = \frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$ 에서

$$\angle PBA = 30^\circ$$

점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

20. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 에 대하여 $P = \{x \mid -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}, x \in S\}$ 이라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, Q, Z, N 은 각각 유리수, 정수, 자연수의 집합이다.)

- ① $S = R$ 이면 P 는 공집합이다.
- ② $S = R$ 이면 P 는 유한집합이다.
- ③ $S = Q$ 이면 P 는 유한집합이다.
- ④ $S = Z$ 이면 P 는 유한집합이다.
- ⑤ $S = N$ 이면 P 는 무한집합이다.

해설

$-\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}$ 에서 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $S = R$ 이거나, $S = Q$ 이면 P 는 무한집합, $S = Z$ 이면 $P = \{0, 1\}$ 이므로 P 는 유한집합, $S = N$ 이면 $P = \{1\}$ 이므로 P 는 유한집합이다.

21. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은? (a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
 $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$
 $= a+b+2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (단 $a=b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$
 $\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a=b$)

④ (반례) $a=1$
 $1^2 - 1 > 1, 0 > 1$
 $\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)
 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b=c$)
 $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c=a$)
 $\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$
 (등호 성립조건은 $a=b=c$)

22. 두 함수 $f(x) = 4x+1$, $g(x) = 2x+3$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{5}$

⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned}g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g \\&= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \circ g \\&= f^{-1} \circ g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\&= f^{-1}(g(-2)) \\&= f^{-1}(-1)\end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$$4a + 1 = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) = -\frac{1}{2}$$

23. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A(0, 0), B(0, -2),

D(2, 0), P(a, b) 라고하면 $2 \cdot \overline{PA}^2 =$

$\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 이므로

$$2 \cdot (a^2 + b^2)$$

$$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$$

$$0 = b - a + 4$$

$$\therefore P(a, b) = (a, a-4)$$

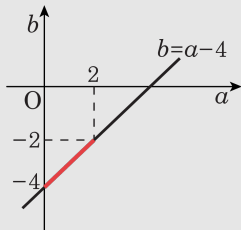
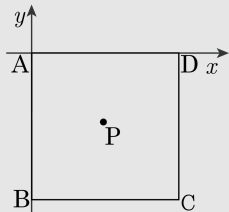
점 P의 자취는 $b = a - 4$ ($0 < a < 2$)

와 같으므로

구하는 길이는 두 점 (0, -4)와 (2, -2)

사이의 거리와 같다.

$$\therefore \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$$



24. 다음 중 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 접하고 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

- ① $x + \sqrt{3}y = 1$ ② $\sqrt{3}x + y = 1$ ③ $x - \sqrt{3}y = -1$
④ $\sqrt{3}x - y = -3$ ⑤ $x + y = 2$

해설

원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하기

위해서는 중심 $(1,0)$ 을 지나야 한다.

곧, $(1,0)$ 을 지나는 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 접선을 구하면 된다.

기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은

$$y = m(x-1), \quad mx - y - m = 0$$

중심 $(-1,0)$ 에서 이 직선에 이르는 거리가

반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,

$$x + \sqrt{3}y = 1 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 1$$

25. $f(x) = \left\lceil \frac{1}{2}x \right\rceil + \left\lceil -\frac{1}{2}x + 1 \right\rceil$ 에 대하여 $f^1 = f, f^2 = f \circ f^1, f^3 = f \circ f^2, \dots, f^n = f \circ f^{n-1}$ 이라 할 때, $f^{2006}(3)$ 의 값은 얼마인가? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$f^1(3), f^2(3), f^3(3), \dots$ 을 차례로 구하여 규칙을 발견한다.

$$f^1(3) = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + \left\lceil -\frac{3}{2} + 1 \right\rceil = 1 + \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore f^1(3) = 0$$

$$\begin{aligned} f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) \\ &= f(0) = [0] + [1] = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f^2(3) = 1$$

$$\begin{aligned} f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) \\ &= f(f^2(3)) = f(1) = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f^3(3) = 0$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(0) = 1$$

$$\therefore f^4(3) = 1$$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$ 은 n 이

짝수일 때는 1, 홀수일 때는 0 이다.

$$\therefore f^{2006}(3) = 1$$