

1. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\vdots$$
$$+ \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right.$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

2. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{6}, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

- ① $\frac{2}{9}$
- ② $\frac{5}{12}$
- ③ $\frac{7}{16}$
- ④ $\frac{5}{24}$
- ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3, \frac{1}{a_2} = 6$ 이므로 $\frac{1}{a_n} = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$
 $a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

4. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

5. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

7. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

8. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

9. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{\overline{(7)}})$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{\overline{(k+1)}})$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$
④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\boxed{1})$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{k+1})$ 도 참이다.

10. 어떤 세포의 집합은 1시간이 지나면 세포 2개는 죽고 나머지는 각각 2배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7개일 때, n 시간 후의 세포의 개수를 a_n 이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$

② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$

④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$$a_1 = 2 \times (7 - 2) = 10$$

$$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$$

$$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$$

$$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2(a_n - 2)$$