1. 평행이동 $T : (x,\ y) \to (x+3,\ y+2)$ 에 의하여 점 $(-1,\ 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 3)$ ② $(4,\ 6)$ ③ $(2,\ 5)$ ④ $(3,\ 9)$ ⑤ $(5,\ 6)$

해설

평행이동 T 는 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 것이다.
구하는 점의 좌표는 $(-1+3,\ 3+2)$,
즉 $(2,\ 5)$

2. 점 $(1, -2)$를 x축 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(-1, -1)$ ② $(-1, -3)$ ③ $(3, -1)$

④ $(3, -3)$ ⑤ $(3,\ 5)$

해설

$(1 + 2, -2 - 1) = (3,\ -3)$

3. 평행이동 $T : (x,\ y) \to (x+3,\ y+2)$ 에 의하여 직선 $y = 5x$ 가 옮겨지는 도형의 방정식을 구하면?

① $y = x - 5$ ② $y = 2x - 3$ ③ $y = 3x - 9$

④ $y = 4x - 7$ ⑤ $y = 5x - 13$

해설

x 대신 $x-3$, y 대신 $y-2$ 를 대입하면 되므로
구하는 도형의 방정식은 $y - 2 = 5\,(x - 3)$
$\therefore y = 5x - 13$

4. 곡선 $y = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동 한 곡선을 구하면?

① $y = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$ ② $y = -3x^3 + 5x^2 + 4x - 2$

③ $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ ④ $y = 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$

⑤ $y = -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

해설

y 축 대칭이므로
주어진 식에 x 대신 $-x$를 대입한다.
$y = 3(-x)^3 - 5(-x)^2 - 4(-x) + 2$
$= -3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$

5. 다음 중 점 P $(-2,\ 5)$를 $y = x$에 대해 대칭이동한 점의 좌표로 알맞은 것은?

① $(2,\ -5)$　② $(2,\ 5)$　③ $(-2,\ -5)$

④ $(-5,\ 2)$　⑤ $(5,\ -2)$

해설

$y = x$대칭은 x좌표를 y좌표로,
y좌표를 x좌표로 바꾸면 된다.

6. 점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 점 (a, b) 가 된다. 이 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(2, -5)$ 이고,
이 점을 다시 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
$(2 + 3, -5 - 2) = (5, -7) = (a,\ b)$
따라서, $a = 5,\ b = -7$ 이므로
$a - b = 12$

7. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y - b = 2(x - a) - 3$
직선의 방정식을 정리하면
$y = 2x - 2a - 3 + b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a + b - 3 = -3$, $2a = b$,
$\therefore \frac{b}{a} = 2$

8. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$ ② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$ ④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에서
$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.
$x = x' - 2 \quad y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,
$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$
$y' = x'^2 - 6x' + 10$ 에서 $y = x^2 - 6x + 10$

9. 원 $x^2+y^2=r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2+(y+1)^2=r^2$　② $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$　④ $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$

⑤ $(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$

해설

원 $x^2+y^2=r^2$ … ①

위의 임의의 점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $P(x', y')$이라 하면

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'-3 \end{cases} \quad \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2+(y'-3)^2=r^2$

점 $P(x', y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로

구하는 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ 이다.

10. 점 $(2, 4)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 3)$ ② $(2,\ 4)$ ③ $(3,\ 5)$

④ $(4,\ 6)$ ⑤ $(5,\ 7)$

해설

점 $(2,\ 4)$ 를 다시 x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(2+2, 4)$, 즉 $(4,\ 4)$
점 $(4, 4)$ 를 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2 \cdot 3 - 4, 4)$, 즉 $(2, 4)$

11. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　② $(-3,\ 1)$　③ $(1,\ -3)$

④ $(-1,\ 3)$　⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로

$\frac{a+1}{2}=-1, \frac{b+3}{2}=2$에서

$a=-3, b=1$

$\therefore (-3,\ 1)$

12. 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 직선 $y=x+3$ 과 접하게 될 때, 양수 m 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

$x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$(x-m)^2+(y-2)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 직선 $x-y+3=0$ 과 접하므로
점 $(m,\ 2)$ 와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 1 이다.

$$\frac{|m-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$$

이것을 풀면 $m=-1\pm\sqrt{2}$
$\therefore m=-1+\sqrt{2}\ (\because m>0)$

13. 직선 $y=ax+b$ 를 평행 이동 $g : (x, y) \rightarrow (x+2, y-3)$ 에 의하여 이동하였더니, 직선 $y=3x+4$ 와 y 축 위의 점에서 직교하였다. $a+b$ 의 값은 ?

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 7 ⑤ 8

해설

직선이 g 에 의하여 평행이동하면

$y+3=a(x-2)+b$ 에서 $y=ax-2a+b-3 \cdots$ ①

① 이 직선 $y=3x+4$ 와 y 축 위의 점에서

직교하므로 $3a=-1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{3}$

또, y 축 위에서 직교하므로 y 절편이 같다.

$-2a+b-3=4$ 에서 $\frac{2}{3}+b-3=4$

$\therefore\ b=4+\frac{7}{3}=\frac{19}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{18}{3}=6$

14. $y = x + 3$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y = -x + 3$ ② $y = x - 3$ ③ $y = -x - 3$

④ $y = 3x + 1$ ⑤ $y = 3x + 3$

해설

x축대칭은 y의 부호를 반대로, 원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.

15. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 과 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=1$　② $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$　④ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

⑤ $x^2+y^2=1$

해설

$y=-x$ 에 대해 대칭이므로
원의 방정식에 x 대신 $-y$ 를, y 대신 $-x$ 를 대입 한다.
$\Rightarrow \quad (-y-1)^2+(-x+2)^2=1$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=1$

16. 포물선 $y = -x^2 - 2x$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1,\ 2)$ ② $(-1, -1)$ ③ $(-1,\ 1)$
④ $(1,\ 2)$ ⑤ $(1,\ 1)$

해설

x축 대칭은 $y \to -y$를 대입하고, y축 평행이동은 $y \to y - 3$을 대입하면,
$y = x^2 + 2x + 3$
$= (x+1)^2 + 2$

17. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1,a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2 \quad \therefore a=1$

18. 점$(-1,\ 4)$를 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점이 $(5,\ 2)$일 때, ab의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 두 점 $(-1,\ 4)$, $(5,\ 2)$를 이은 선분의 중점이므로

$(a,\ b)=\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(2,\ 3)$

$\therefore\ a=2,\ b=3\ \therefore\ ab=6$

19. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 다른 한 원은
서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$ 이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$가
직선 $y=ax+b\cdots$①에 대하여
대칭이므로 직선 ①은 점 $(-2,1)$과 점 $(0,0)$ 을 잇는 선분을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ①위에 있고

기울기의 곱은 -1 이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2,\ b=\frac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

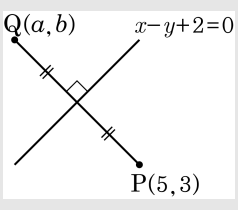
20. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab=7$

해설

$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면



$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$\dfrac{a+5}{2}-\dfrac{b+3}{2}+2=0$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$\times 1=-1$ 이므로

($\because\ \overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$\dfrac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

21. 점$(4,\ 3)$을 $y=2x$ 에 대칭이동한 점의 좌표는?

① $(0,\ 5)$　② $(0,\ 1)$　③ $(-1,\ 2)$

④ $(0,\ -5)$　⑤ $(-1,\ -2)$

해설

점 P$(4,\ 3)$을 직선 $y=2x$ 에 대칭 이동한 점을 $Q\ (\alpha,\ \beta)$ 라 할 때 직선 PQ 가 $y=2x$ 에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$\frac{\beta-3}{\alpha-4}=-\frac{1}{2}\cdots$㉠

점 P ,Q 의 중점 $\left(\frac{\alpha+4}{2},\ \frac{\beta+3}{2}\right)$ 이

직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\frac{\beta+3}{2}=2\times\frac{\alpha+4}{2}\cdots$㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=0,\ \beta=5$

따라서 $(0,\ 5)$ 이다.

22. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(2,5)$ 가 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y=ax+b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2}=a\cdot\frac{5}{2}+b \rightarrow 5a+2b=9$

선분AB 와 $y=ax+b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2}=-1$

따라서, $a=1$

$5\cdot 1+2b=9$

$\therefore\ 2b=4 \quad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=1+2=3$

23. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$　② $(2,\ 5)$　③ $(3,\ 5)$

④ $(4,\ 5)$　⑤ $(6,\ 5)$

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$에 대입하면

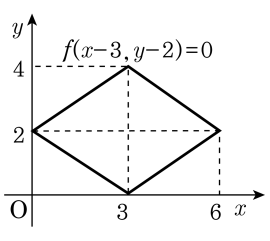
$a-b=-3\cdots①$

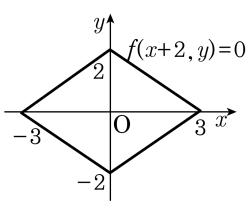
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.

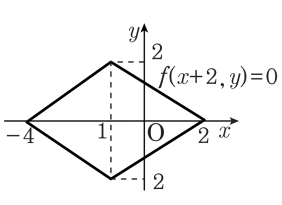
$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots②$

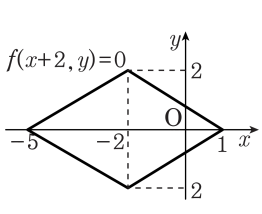
따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$

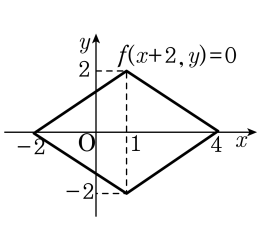
24. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

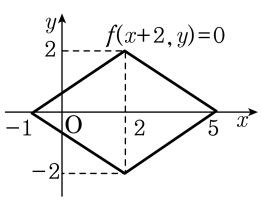


① 

② 

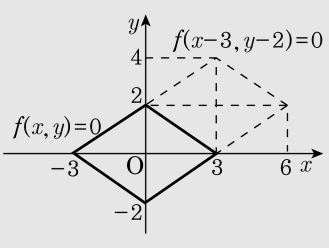
③ 

④ 

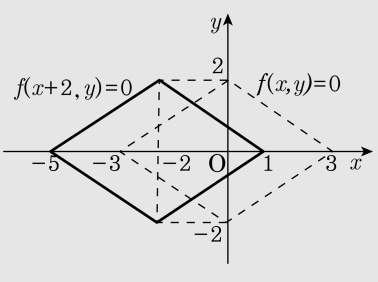
⑤ 

해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



25. 다음 중 원 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=2$ ② $x^2+y^2=3$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $(x+1)^2+y^2=5$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 ①이다.

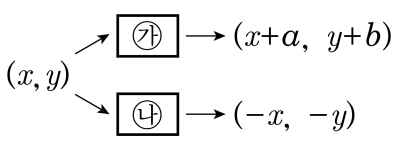
26. 원 $x^2+(y-1)^2=36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 m,n에 대하여 $m+n$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y=mx+n$은 점 $(0,1)$을 지난다.
$1=n\cdots$㉠
직선 $y=mx+n$를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y-2=m(x-1)+n$이 직선이
점 $(4,-3)$을 지나므로
$-5=3m+n\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2, n=1$
$\therefore m+n=-2+1=-1$

27. 다음과 같은 두 연산 장치 ㉮, ㉯가 있다.



원 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$가 연산 장치 ㉮와 ㉯를 연속하여 통과하면서 원 $x^2+y^2=r^2$으로 출력되었다. 이때, $a^2+b^2+r^2$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

원의 중심만 따로 생각한다.

$(3,4) \xrightarrow{\text{가}} (3+a, 4+b) \xrightarrow{\text{나}} (-3-a, -4-b)$

$\Rightarrow \quad (-3-a, -4-b) = (0,0)$

$\therefore \quad a=-3, \quad b=-4, \quad r=5$

$a^2+b^2+r^2=50$

28. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)
$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)
원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.
따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.
$\therefore\ a-2-3=0 \quad \therefore\ a=5$

29. 직선 $x-3y+1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-m)^2+(y-n)^2=5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m+n$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x-3y+1=0$ 의 x 축 대칭 $(y \to -y)$
$\to\ x+3y+1=0$
$x+3y+1=0$ 의 $y=-x$ 축 대칭 $(x \to -y,\ y \to -x)$
$\to\ -y-3x+1=0,\ \ y=-3x+1$
이 직선이 $(x-m)^2+(y-m)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 $(m,\ n)$ 을 지난다.
$\therefore\ 3m+n=1$

30. 직선 $y = kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
$y = -kx - 1 \cdots ㉠$
이제 원의 방정식을 정리하면,
$(x + 3) + (y - 2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
$2 = 3k - 1 \Rightarrow \quad k = 1$

31. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = x^2 - 3x \quad \cdots$㉠

$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots$㉡이라고 하자.

㉠,㉡이 점 $P(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

㉡ : $y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $P(a,\ b)$ 이다.

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

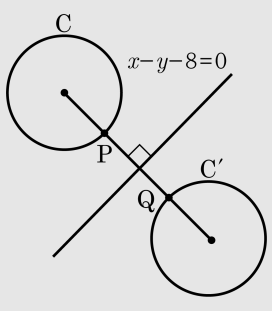
32. 원 $C : x^2+y^2+6x-16=0$ 을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하고 두 원 C, C' 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ $7\sqrt{5}-12$

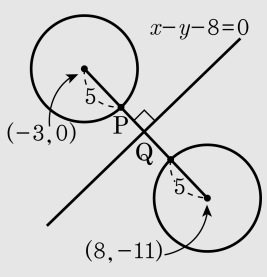
④ 5 ⑤ $11\sqrt{2}-10$

해설

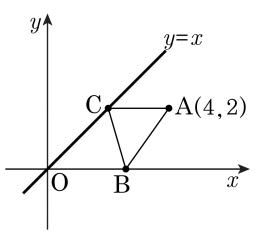
선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결한 선분이
두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡으면 된다.



이 때, 원 $C : x^2+y^2+6x-16=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x+3)^2+y^2=25$ 이므로
이 원의 중심은 $(-3,0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.
이 원을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한
원 C' 의 중심을 (a,b) 라 하면
두 점 $(-3,0)$ 과 (a,b) 를 이은
선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가
직선 $x-y-8=0$ 위에 있으므로
$\frac{a-3}{2}-\frac{b}{2}-8=0$
$\therefore a-b=19 \cdots\cdots$ ㉠
또, 직선 $x-y-8=0$, 즉 $y=x-8$ 의 기울기는 1 이고,
두 원의 중심 $(-3,0)$, (a,b) 를 연결한 직선과 수직이므로
$\frac{b}{a+3}=-1$
$\therefore a+b=-3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8, b=-11$
따라서, 두 원의 중심 $(-3,0)$, $(8,-11)$ 사이의 거리는
$\sqrt{\{8-(-3)\}^2+(-11-0)^2}=11\sqrt{2}$
이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의 길이의 최솟값은
$11\sqrt{2}-5\times 2=11\sqrt{2}-10$



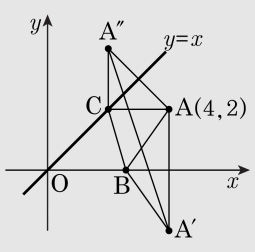
33. 다음 그림과 같이 점 A(4, 2) 와 x 축과 직선 $y = x$ 위에 각각 두 점 B, C 가 있다. 이 때, △ABC 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?



① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

점 A(4, 2) 를 x 축에 대칭 이 동 한 점 A′(4, − 2) 와
$y = x$ 에 대칭이동한 점 A″(2, 4) 를 구하여
연 결 하 면 다 음 그 림 에 서



$$(\triangle ABC\text{의 둘레}) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$
$$= \overline{A'B} + \overline{A''C} + \overline{BC} \geq \overline{A'A''}$$

점 B 와 C 를 직선 A′A″ 이 각각 x 축과 직선 $y = x$ 와 만나는 점으로 잡을 때, △ABC 의 둘레의 길이가 최소이다.
이 때, 최솟값은 $\sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.