1. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$\vdots$

$+ \left| a_n = a_{n-1} + (n-1) \right.$

$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$

$= -1 + \dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

2. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$

$= 2^{n-2}$

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$

4. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

5. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로

a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$\therefore a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$

$= 4 + 3n - 3$

$= 3n + 1$

$\therefore a_{10} = 31$

6. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

7. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

8. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

9. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{\text{(가)}})$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{\text{(나)}})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $0,\ k$ ② $0,\ k+1$ ③ $0,\ k-1$
④ $1,\ k$ ⑤ $1,\ k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.
(i) $P(\boxed{\ 1\ })$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{\text{k+1}})$도 참이다.

10. 어떤 세포의 집합은 1시간이 지나면 세포 2개는 죽고 나머지는 각각 2배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7개일 때, n시간 후의 세포의 개수를 a_n이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$

② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$

④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$a_1 = 2 \times (7 - 2) = 10$

$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$

$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$

$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$

$\vdots$

$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$

$\therefore\ a_{n+1} = 2(a_n - 2)$