1. 직선 $2x-y+3=0$ 을 x 축 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 이동하면 $2x+ay+b=0$ 이 된다고 한다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$2x-y+3=0$ 을 x 축 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 이동하면
$2(x+1)-(y-2)+3=0$ 이 된다.
이 식을 정리하면 $2x-y+7=0$ 이다.
따라서 $a+b=-1+7=6$

2. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은?

① $x+2y-5=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x+2y-2=0$
④ $x+2y-1=0$ ⑤ $x+2y+1=0$

해설
직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$(x-2)+2(y+3)-3=0$ 이 된다.
이 식을 정리하면 $x+2y+1=0$ 이다.

3. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$

4. $y=-(x-1)^2+2$ 를 x 축 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y=(x+3)^2+5$
② $y=-(x-5)^2+5$
③ $y=-(x+3)^2+5$
④ $y=-(x-5)^2-1$
⑤ $y=-(x+3)^2-1$

해설

$x-4=x'y+3=y'$ 라 하자.
평행이동 된 x', y' 를 원식에 대입하면,
$y'-3=-(x'+4-1)^2+2$
$\Rightarrow \quad y'=-(x'+3)^2+5$
$\Rightarrow \quad y=-(x+3)^2+5$

5. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축의 방향으로 p , y 축의 방향으로 $-2p$ 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = 2x - 5$ 와 일치하였다. 이때, 상수 p 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선을 x 축으로 p , y 축으로 $-2p$ 만큼 평행이동하면,

$\Rightarrow \quad y + 2p = 2(x - p) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 4p + 3$

$\Rightarrow \quad -4p + 3 = -5$

$\therefore \; p = 2$

6. 직선 $y = 2x + 3$을 x축으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은?

① $y = 2x + 1$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 2x + 5$
④ $y = 2x + 7$ ⑤ $y = 2x + 9$

해설
x축으로 1만큼 평행이동하므로
주어진 방정식은 $y = 2(x - 1) + 3$으로 이동한다.

7. 방정식 $x^2+y^2-7y=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2+x-x+2=0$

② $x^2+y^2-2x-3y+5=0$

③ $x^2+y^2-8x-3y+6=0$

④ $2x^2+y^2-9x+4y+3=0$

⑤ $4x^2+y^2+2x-y+9=0$

해설

$(x-4)^2+(y+2)^2-7(y+2)=0$

$\therefore x^2+y^2-8x-3y+6=0$

8. 평행이동 $f:(x,y)\to(x-2,y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$
④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x'=x-2,\quad y'=y+1$ 이라 하자.
x,y 를 원래 식에 대입하면,
$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$
$\Rightarrow\quad 2x'+y'+8=0$
$\Rightarrow\quad 2x+y+8=0$

9. 직선 $ax+by=1$ 을 x 축의 방향으로 -2, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선이 $2x-3y+12=0$일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

직선 $ax+by=1$ 을 x 축의 방향으로 -2 ,
y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면
$a(x+2)+b(y-3)=1$, $ax+by+2a-3b-1=0$
이 직선이 $2x-3y+12=0$ 과 같으므로
$\frac{a}{2}=\frac{b}{-3}=\frac{2a-3b-1}{12}$
이 식을 풀면 $a=2$, $b=-3$ 이다.
$\therefore a+b=-1$

10. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$ ② $y = 3x + 2$ ③ $y = -3x + 2$
④ $y = -3x + 4$ ⑤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은
$y - (-2) = -3x$
$\therefore y = -3x - 2$

11. 직선 $3x + y - 5 = 0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x + y - 1 = 0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x + y - 5 = 0$에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$을 대입하면
$3(x - 1) + (y - n) - 5 = 0$
$3x + y - n - 8 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x + y - 1 = 0$과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore\ n = -7$

12. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$를 얻었다. 이 때, 상수 c의 값은?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 9 ⑤ 16

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$을 변형하면
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$
이 원이 평행이동하여 $x^2 + y^2 = c$가 되려면 $c = 5$

13. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2-8x+10y+31=0$을 평행이동하여 원 $x^2+y^2=c$를 얻었다. 이 때, 상수 c의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$x^2+y^2-8x+10y+31=0$을 변형하면

$(x-4)^2+(y+5)^2=10$

이 원이 평행이동하여 $x^2+y^2=c$가 되려면 $c=10$

14. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

15. 점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동에 대하여 직선 $y = -2x + k$ 로 옮겨질 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동을
$T : (x, y) \to (x + m, y + n)$ 이라고 하면,
$(1, 2) \xrightarrow{T} (-2, -1)$ 에서
$1 + m = -2, 2 + n = -1 \qquad \therefore m = -3, n = -3$
$\therefore T : (x, y) \to (x - 3, y - 3)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -3 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 옮기는 평행이동이다.
평행이동 $T : (x, y) \to (x - 3, y - 3)$ 에 의하여
직선 $y = -2x + k$ 는
직선 $y + 3 = -2(x + 3) + k$로 옮겨진다.
이 때, 이 직선이 원점을 지나므로
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$3 = -6 + k \qquad \therefore k = 9$

16. 원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 이 평행이동 $(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 으로 옮겨질 때, $m+n+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 에서
$(x+1)^2+(y+3)^2=9$ 이므로
이 원의 중심은 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.
한편, 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-r$ 이므로
이 원의 중심은 $(1,2)$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{5-r}$ 이다.
이때, 주어진 평행이동
$(x,y) \to (x+m, y+n)$ 에 의하여
처음 원의 중심 $(-1,-3)$ 은
옮겨진 원의 중심 $(1,2)$ 로 옮겨지므로
$(-1+m, -3+n)=(1,2)$
따라서, $-1+m=1$ 에서 $m=2$
$-3+n=2$ 에서 $n=5$
또한, 평행이동에 의하여 옮겨진 원의 크기는
변하지 않으므로 옮기기 전과 옮긴 후의
원의 반지름의 길이가 같다.
따라서, $\sqrt{5-r}=3$ 에서 $5-r=9$
$\therefore r=-4$
$\therefore m+n+r=2+5-4=3$

17. 직선 $y = ax + b$ 를 평행이동 $f\ :\ (x,\ y)\ \rightarrow\ (x-1,\ y+2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y = 2x + 3$ 과 y축 위에서 직교할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax + b$ 의 x , y 대신에 각각 $x + 1$, $y - 2$ 를 대입하면
$y - 2 = a(x + 1) + b$
$\therefore y = ax + a + b + 2$
이 직선과 직선 $y = 2x + 3$ 이 y 축 위에서 직교하므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0,\ 3)$ 을 지난다.
$a \times 2 = -1$, $a + b + 2 = 3$
연립하여 풀면
$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$
$\therefore a - b = -2$

18. 원 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ 을 x 축 방향으로 a , y 축방향으로 b 만큼 평행이동하여 원점이 원의 중심이 되었다. 이때, 이와 같은 이동에 의하여 점 (2, 5) 은 어느 점으로 옮겨지는가?

① (0, 9) ② (1, 3) ③ (1, 8)

④ (3, 5) ⑤ (4, 4)

해설

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+3)^2=9 \rightarrow$ 중심 : $(1,-3)$

$\therefore$ 원점이 중심이 되려면

x 축으로 -1, y 축으로 3 만큼 평행 이동해야 한다.

$\Rightarrow \quad (2-1, 5+3) \quad \rightarrow \quad (1, 8)$

19. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

20. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

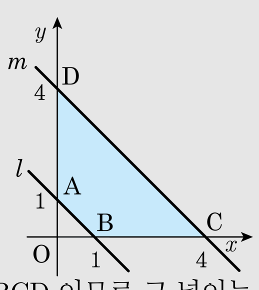
직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은
$l \ : \ y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
$m \ : \ (-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
$n \ : \ (-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

21. 직선 $l : x+y=1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 직선을 m 이라고 할 때, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

직선 $l : x+y=1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한
직선의 방정식은 $(x-2)+(y-1)=1$
$\therefore m : x+y=4$
따라서, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로
둘러싸인 도형은 다음 그림의 사각형 ABCD 이므로 그 넓이는
삼각형 OCD 의 넓이에서
삼각형 OBA 의 넓이를 뺀 것과 같다.



$$\therefore \square ABCD = \triangle OCD - \triangle OBA = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{15}{2}$$

22. 변환 $f\ :\ (x,\ y) \to (x-y+1,\ cx+2y)$ 에 의하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(-1,\ 2)$ 가 한 직선 위로 옮겨질 때, c 의 값을 구하여라.

① -2 ② 2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 6

해설

옮겨진 점은 $(1,0)$, $(2,c)$, $(-2,-c+4)$
동일한 직선 위에 있기 위해선 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{c-0}{2-1} = \frac{-c+4-0}{-2-1} \quad \therefore\ c=-2$$

23. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ 가 점 B 로 옮겨질 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{2}$ 이고 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에 이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다. 이때, mn 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

점 $\mathrm{A}(1,2)$ 를 x 축 방향으로 m 만큼,
y축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점 B 는
$\mathrm{B}(1+m, 2+n)$ 이고,
선분 AB 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로
$\sqrt{m^2+n^2} = 4\sqrt{2} \qquad \therefore m^2+n^2 = 32$
또한, 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에
이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로
$$\frac{|1+m+2+n-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$
$\therefore |m+n| = 6$
이 식의 양변을 제곱하면
$m^2+2mn+n^2 = 36$
이 때, $m^2+n^2 = 32$ 이므로
$2mn = 36-32 = 4 \qquad \therefore mn = 2$

24. 직선 $2x+ay+b=0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x+2y-6=0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① -16 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

해설

직선 $2x+ay+b=0$ 을
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,
$2(x+3)+a(y-1)+b=0$
$2x+ay-a+b+6=0$ ⋯㉠
즉, 직선 ㉠ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,
x 절편은 $\frac{a-b-6}{2}$ 이다.
이 때, 직선 ㉠ 이 직선 $3x+2y-6=0$,
즉 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 과 x 절편이 같고
서로 직교하므로
(i) $\frac{a-b-6}{2}=2$
$\therefore\ a-b=10$
(ii) $-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \quad \therefore\ a=-3$
따라서 (i), (ii) 에서 $a=-3$, $b=-13$ 이므로
$a+b=-3+(-13)=-16$

25. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x-2y-1=0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

① $x+y-1=0$　② $x-2y+3=0$　③ $2x+y-1=0$
④ $x-y+5=0$　⑤ $x-2y+7=0$

해설

거꾸로 $x-2y-1=0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$\Rightarrow\ (x+2)-2(y-1)-1=0$

$\Rightarrow\ x-2y+3=0\ \cdots\ l$

26. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

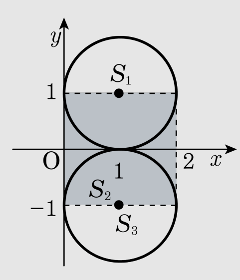
포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$
$\therefore\ b = 2a + 3$
따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$
$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$ 이므로
$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,
최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

27. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x, y+b)\ (-2 \le b \le 0)$ 에 의하여 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 이 옮겨지면서 만드는 자취의 넓이는?

① $\pi+2$　② $\pi+4$　③ $2\pi+2$
④ $2\pi+4$　⑤ 2π

해설

평행이동 f 에 의하여 옮겨진 도형들은 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 을 y 축의 방향으로
0 부터 -2 까지 평행이동한 도형들이므로 옮겨진 도형이 만드는 자취는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이 S 는
$S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi + 4$

28. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 5　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \rightarrow \quad (x+2,\ y+1)$

$y = 2x + a \ \xrightarrow{f} (y-1) = 2 \cdot (x-2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a-3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5},\ |a-3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8 \ (\because\ a > 0)$

29. 직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2=1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a , b 에 대하여 $3a+4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$3(x-a)+4(y-b)=0$ 이므로
원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y-3a-4b=0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0,\ 0)$ 에서 직선
$3x+4y-3a-4b=0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|\,3\times 0+4\times 0-3a-4b\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore |-3a-4b|=5$
이 때, a , b 가 양수이므로
$3a+4b=5$ 이다.

30. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

: $y = 3(x - a) \Rightarrow \quad 3x - y - 3a = 0$

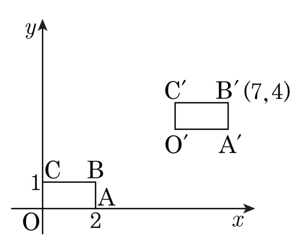
원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$a = \pm\sqrt{10}$

$\therefore \ a^2 = 10$

31. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OC}}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $\mathrm{O} \to \mathrm{O}', \mathrm{A} \to \mathrm{A}', \mathrm{B} \to \mathrm{B}', \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′ 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A′C′ 의 방정식은?



① $x+2y-10=0$ ② $x+2y-13=0$

③ $x+2y-16=0$ ④ $2x+3y-17=0$

⑤ $2x+3y-19=0$

해설

점 B(2,1) 이 점 B′(7,4) 로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′ 은 직사각형 OABC 를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 A′(7,3), C′(5,4) 로 옮겨지므로
직선 A′C′ 의 방정식은 $y-3=\frac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$

$\therefore\ x+2y-13=0$

해설

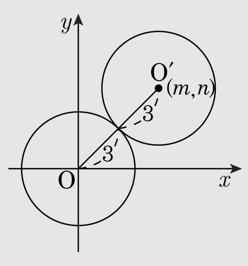
직선 A′C′ 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로
직선 A′C′ 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\frac{1}{2}$ 이다.
한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=1$ 에서 점 A′ 의 좌표는 (7,3) 이므로
이것을 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 에 대입하여 정리하면 $b=\frac{13}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선 A′C′ 의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$,

$\therefore\ x+2y-13=0$

32. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=9$와 이 원을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 도형의 교점이 1개일 때, m^2+n^2의 값은?

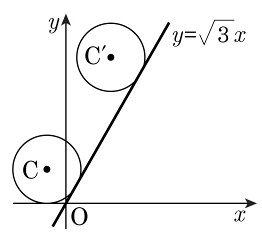
① 20　　② 25　　③ 30　　④ 36　　⑤ 40

해설



중심이 O(0, 0)이고
반지름의 길이가 3인 원을,
x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면
중심이 $\mathrm{O}'(m, n)$이고
반지름의 길이가 3인 원이다.
두 원의 크기가 같으므로 내접할 수 없고,
두 원의 교점이 1개이므로 두 원은 서로 외접한다.
따라서 중심거리가 반지름의 길이의 합과 같으므로
$\overline{\mathrm{OO}'}=\sqrt{m^2+n^2}=3+3=6$
$\therefore m^2+n^2=36$

33. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 C : $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?



① $\frac{3+\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}+1)\pi$ ② $\frac{3-\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}-1)\pi$

③ $\frac{3+\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$ ④ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$

⑤ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{b-1}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서

$b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$\Rightarrow \quad (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b-1)^2 = 16\pi^2$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$

$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{3}a+1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$

$\Rightarrow \quad a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \ (\because a > 0)$

$\Rightarrow \quad b = 2\sqrt{3}\pi + 1$

$\therefore \quad a + b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$