

1. 분수함수 $y = \frac{3x+1}{x-1}$ 의 그래프가 두 직선 $y = x + m$, $y = -x + n$ 에 대하여 대칭일 때, $m + n$ 의 값을 구하면? (단, m, n 은 상수)

① -3

② 0

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

$$y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3 \text{ 이므로}$$

주어진 분수함수의 그래프는 두 점근선

$x = 1$, $y = 3$ 의 교점 $(1, 3)$ 을 지나고

기울기가 ± 1 인 직선에 대칭이다.

즉, 두 직선 $y = x + m$, $y = -x + n$ 은

점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$3 = 1 + m$, $3 = -1 + n$ 에서

$m = 2$, $n = 4 \therefore m + n = 6$

2. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} = S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1 \times 2007} + \frac{1}{2 \times 2006} + \frac{1}{3 \times 2005} + \cdots + \frac{1}{2006 \times 2} + \frac{1}{2007 \times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

① $\frac{S}{1003}$

② $\frac{S}{1004}$

③ $\frac{S}{2006}$

④ $\frac{S}{2007}$

⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A \times B$ 의 꼴이고
 $A + B = 2008$ 로 일정하므로

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A+B} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \text{ 임을 이용한다.}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2007} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2006} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2005} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{2008} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{2008} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} \right) \\ &= \frac{S}{1004} \end{aligned}$$

3. 다음은 제품 p_n 을 만드는 방법과 소요 시간에 대한 설명이다. (단, $n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

가) 제품 p_1 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 1이다.

나) 제품 p_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_2 가 한 개 만들어진다.

다) 제품 p_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_{2n} 이 한 개 만들어진다.

이 때 p_n 을 두 개 연결하는 데 걸리는 시간은 $2n$ 이다. 이때, 제품 p_{16} 을 한 개 만드는데 걸리는 시간은?

① 32

② 64

③ 80

④ 96

⑤ 112

해설

$n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 이고 $p_1 \rightarrow 1$

$p_2 \rightarrow p_1 p_1$ 연결 : $1 + 1 + 2 = 4$

$p_4 \rightarrow p_2 p_2$ 연결 : $4 + 4 + 2 \times 2 = 12$

$p_8 \rightarrow p_4 p_4$ 연결 : $12 + 12 + 2 \times 4 = 32$

$p_{16} \rightarrow p_8 p_8$ 연결 : $32 + 32 + 2 \times 8 = 80$