1. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$

② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$

④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$(x-1)^2(x^2 + 2x + 3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

2. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$ ② $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ ④ $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\ \ x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

3. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

4. 사차방정식 $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$　② $\sqrt{2}i$　③ -2
④ -1　⑤ 1

해설

(준식) $=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$
실근의 합은 $1+(-1)=0$
허근의 합은 -2
모든 근의 합은 -2

5. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

6. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$　　② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$　　④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

7. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

8. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

9. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30　② 25　③ 23　④ 18　⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$

$\therefore a < -8$ 또는 $a > 4$

ii) $a > 0$

iii) $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

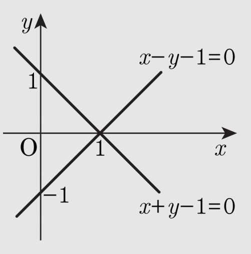
$\therefore 4 < a < 8$ 이므로 $a = 5,\ 6,\ 7$

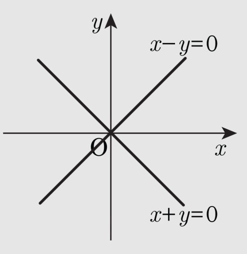
10. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다.　② 0 개　③ 1 개
④ 2 개　⑤ 4 개

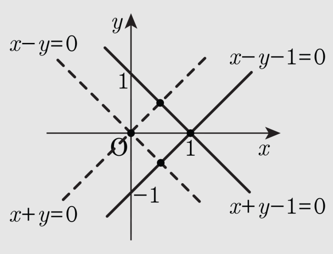
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

11. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2 \quad =1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=x-3$을 이차식에 대입하면

$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$

$x^2-3x+2=0$

$\therefore\ x=1, 2$

(i) $x=1$일 때 $y=-2$

(ii) $x=2$일 때 $y=-1$

따라서 $xy=-2$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하면?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20\ \therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$ (복호동순)

$\therefore (x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

 i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

 ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

 i), ii) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$ 이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,
$x=-y, x=-2y$
ⅰ) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)
ⅱ) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$
$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)
그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은
② $\frac{1}{3}$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 $k_1,\ k_2$ 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots$ ㉢

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

18. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

19. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

20. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$
$x,\ y$는 실수이므로 $x^2\geq 0,\ (y-1)^2\geq 0$
따라서, $x=0,\ y-1=0$이므로 $x=0,\ y=1$
$\therefore\ x+y=0+1=1$

21. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

22. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x, 3점문항을 y,
4점문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$

$\therefore \quad x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11문항

23. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0 \therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ ······㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$······㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

24. 사차방정식 $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1-\sqrt{5}$
④ $2-\sqrt{5}$ ⑤ $3-\sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x}^2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\frac{1}{x}=t$라 하면

$t^2-5t+6=0 \rightarrow t=2,\ 3$

i) $t=2$일 때

$x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=1$

ii) $t=3$일 때

$x^2-3x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

25. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

26. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(ⅰ) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$
따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ⅱ) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4 개이다

27. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0, \quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$

28. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α이므로
$\alpha^2+k\alpha+3=0$ ……㉠
$\alpha^2+\alpha+3k=0$ ……㉡
㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,
$(k-1)(\alpha-3)=0$
(ⅰ) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.
(ⅱ) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore$ $k=-4$
$\therefore$ $\alpha-k=7$

29. $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=4$ 이 성립할 때, c의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, $a,\ b,\ c$는 실수)

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 4

해설

$a+b+c=4$

$\Rightarrow\ \ b=4-(a+c)$

$a^2+b^2+c^2=12$

$\Rightarrow\ \ a^2+c^2+\{4-(a+c)\}^2=12$

a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2+(c-4)a+c^2-4c+2=0$

a,b,c 는 실수이므로 판별식이 0 보다 크거나 같다.

$D=(c-4)^2-4(c^2-4c+2)\geq 0$

$\Rightarrow\ \ 3c^2-8c-8\leq 0$

$\Rightarrow\ \ \frac{4-2\sqrt{10}}{3}\leq c\leq\frac{4+2\sqrt{10}}{3}$

$\therefore$ (최댓값 $\times$ 최솟값)

$=\left(\frac{4-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{10}}{3}\right)$

$=-\frac{8}{3}$

30. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡
$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢
㉠, ㉡에서
$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣
$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=20$
$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$
$t=1,\ -2,\ 3$
$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$
$\therefore\ x-2y+z=-1$