1. 다음 중 집합이 아닌 것을 모두 찾아라.

① 7 보다 작은 자연수의 모임

② 키가 큰 나무의 모임

③ 월드컵을 개최한 나라의 모임

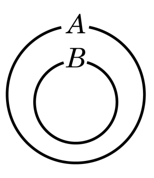
④ 우리 반에서 농구를 잘 하는 학생의 모임

⑤ 15의 약수의 모임

해설

'키가 큰', '농구를 잘하는' 은 그 대상을 분명히 알 수 없으므로 집합이 아니다.

2. 집합 B 가 $\{1, 3, 7\}$ 일 때, 다음 중 아래 벤 다이어그램을 만족하는 집합 A 가 될 수 있는 것은?



① $\{x \mid x$는 3의 배수$\}$

② $\{x \mid x$는 7보다 작은 자연수$\}$

③ $\{x \mid x$는 7의 약수$\}$

④ $\{x \mid x$는 10이하의 소수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\}$

해설

① $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$
② $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
③ $\{1,\ 7\}$
④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
⑤ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

3. 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 $\square$ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중 알맞은 것을 순서대로 써넣어라.

$A = \{1, 2, 5, 10\}$
$B = \{x \mid x$는 15의 약수$\}$
$C = \{x \mid x$는 10의 약수$\}$

$A\square B$, $A\square C$ (단, $=$는 ㉠, $\neq$는 ㉡로 입력할 것)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉠

해설

집합 B, C를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{1, 3, 5, 15\}$, $C = \{1, 2, 5, 10\}$이다.
따라서 $A \neq B$, $A = C$이다.

4. 다음 그림은 민지네 반 시간표를 나타낸 것이다. 영어 수업이 있는 요일의 집합을 A , 수학 수업이 있는 요일의 집합을 B 라 할 때, $A \cap B$ 를 구하여라.

월	화	수	목	금
국어	도덕	영어	영어	기가
수학	사회	과학	사회	일어
체육	수학	음악	체육	수학
영어	국어	도덕	과학	영어
과학	기가	창재	수학	국어
기가	체육	국어	미술	과학
		국사		

▶ 답：

▷ 정답： {월, 목, 금}

해설

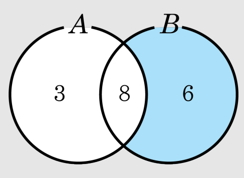
$A = \{월 , 수 , 목 , 금\}$
$B = \{월 , 화 , 목 , 금\}$
$A \cap B = \{월 , 목 , 금\}$

5. 희진이네 반 학생 중 피자를 좋아하는 학생은 11 명, 떡을 좋아하는 학생은 14 명, 피자와 떡을 모두 좋아하는 학생은 8 명이다. 이때, 떡만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 6 명　② 8 명　③ 10 명　④ 12 명　⑤ 14 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



6. 9보다 작은 짝수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $1 \in A$ ② $3 \notin A$ ③ $4 \in A$ ④ $5 \notin A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이다. 따라서 $1 \notin A$

7. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{4, 8\}$
④ $\{2, 8\}$ ⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$　② $P \cup Q$　③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$　⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

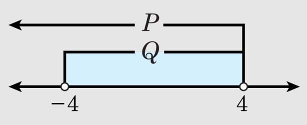
9. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

10. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$
② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$
③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$
④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$
⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 = (x+1) - (y+1)$$
$$= x - y > 0$$
$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

11. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.
③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.
④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식
$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균
④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

12. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0$, $\frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}}+1 \geq 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

13. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

14. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24 개

해설
a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

15. 집합 $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 12의 약수$\}$ 의 부분 집합 중에서 원소 1 또는 6 을 포함하는 부분집합의 개수는?

① 8 개　② 12 개　③ 16 개　④ 20 개　⑤ 24 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$
원소 1 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-1} = 16$ (개)
원소 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-1} = 16$ (개)
원소 1, 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-2} = 8$ (개)
원소 1 또는 6 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$16 + 16 - 8 = 24$ (개)

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B\cap A^c)=\varnothing$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $B^C=\varnothing$ ② $A^C\cap B^C=\varnothing$ ③ $A\cap B^C=A$

④ $A-B=A$ ⑤ $A=B$

해설

$(A-B)\cup(B\cap A^c)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$ 이므로 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$ 이다.

따라서 $A\subset B, B\subset A$ 이므로 $A=B$ 이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, a, 5\}$, $B = \{2, b+1, b+2, 6\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 라고 할 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 3, 5\}$
④ $\{1, 3, 6\}$ ⑤ $\{1, 3, 5, 6\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4$, $A = \{1, 2, 4, 5\}$ 이다.
(1) $b + 1 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$ 가 되어 조건에 맞지 않는다.
(2) $b + 2 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4\}$ 가 되어 조건에 맞는다.
따라서 $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이 되어
$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$ 이다.

18. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$가 성립할 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$
$f(1) = 1,\ f(2) = 3^2,\ f(3) = 5^2,$
$f(4) = 7^2,\ f(5) = 9^2,\ f(6) = 11^2 = 121$

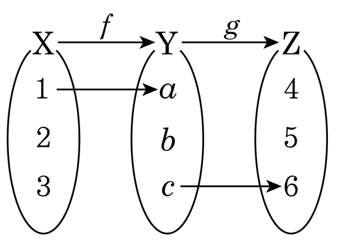
19. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \to Y$, $g(x) = ax + b$가 $f = g$일 때, ab의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f와 g의 정의역이 같으므로
$f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$이면 $f = g$가 된다
$f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots$ ㉠
$f(0) = 1 = g(0) = b \cdots$ ㉡
$f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$a = 1$, $b = 1$
따라서 $ab = 1$

20. 세 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c\}$, $Z = \{4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 일대일 대응인 함수 $f\ :\ X \to Y$와 $g\ :\ Y \to Z$가 $f(1) = a,\ g(c) = 6,\ (g \cdot f)(2) = 4$를 만족할 때, $f(3)$의 값은?



① a　　② b

③ c　　④ b, c 모두 가능하다.

⑤ a, b, c 모두 가능하다.

해설

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 4 \cdots$ ㉠

함수 f 와 g 는 일대일 대응이므로 $g(f(2)) = 4$에서 $f(2) = a$ 또는 b

ⅰ) $f(2) = a$인 경우

$f(1) = a$로 정의된 조건과 모순

ⅱ) $f(2) = b$인 경우

$f(1) = a,\ f(2) = b$로 성립

$\therefore\ f(2) = b,\ f(3) = c$

21. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$
(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$\sqrt{2} \in A,\ (\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^3 \in A,\ \cdots,$
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.
㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^4 \in A,\ (\sqrt{2})^6 \in A,\ \cdots,$
즉 $2 \in A,\ 2^2 \in A,\ 2^3 \in A,\ \cdots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
㉢ (반례)
집합 $A = \{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ (\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{2})^3,\ \cdots\}$은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

22. 두 집합 $A = \{x | x\text{는 7미만의 자연수}\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$
$(B - A) \cup X = X$이므로 $(B - A) \subset X$,
$(A \cup B) \cap X = X$이므로 $X \subset (A \cup B)$,
$\{7,\ 8\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$,
따라서, 집합 X는 $A \cup B$의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{8-2} = 2^6 = 64$(개)이다.

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(U)=40,\ n(A\cap B)=5,\ n(A^c\cap B^c)=3$ 일 때, $n(A-B)+n(B-A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 32

해설

$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^c)=40-3=37$

$n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=37-5=32$

24. $x>2$일 때, $2x-3+\dfrac{1}{x-2}$의 최솟값을 a, 그 때의 x의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① $5+\sqrt{2}$ ② $5+2\sqrt{2}$ ③ $5+3\sqrt{2}$
④ $5+4\sqrt{2}$ ⑤ $5+6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$2x-3+\frac{1}{x-2}=2(x-2)+\frac{1}{x-2}+1$$
$$\geq 2\sqrt{2(x-2)\times\frac{1}{x-2}}+1$$
$$\geq 2\sqrt{2}+1$$

$\therefore a=2\sqrt{2}+1$

$2(x-2)=\dfrac{1}{x-2}$에서

$2(x-2)^2=1,\ (x-2)^2=\dfrac{1}{2}$

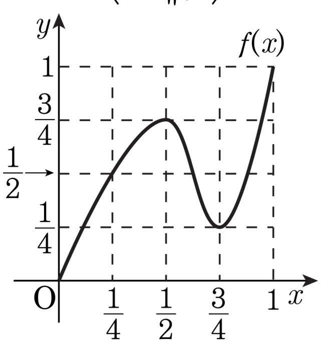
$\therefore\ x=2\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x>2$ 이므로 $b=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a+2b=2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+4=5+3\sqrt{2}$

25. $R=\{x|0 \le x \le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x)=(f \circ f \circ ... \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$　② $\frac{95}{2}$　③ $\frac{93}{2}$　④ $\frac{91}{2}$　⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \cdots$ 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\ f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$\therefore\quad f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)=33\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{99}{2}$