

1. 다음 중 집합이 아닌 것을 모두 찾아라.

① 7 보다 작은 자연수의 모임

② 키가 큰 나무의 모임

③ 월드컵을 개최한 나라의 모임

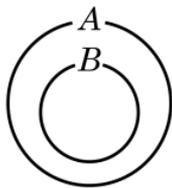
④ 우리 반에서 농구를 잘 하는 학생의 모임

⑤ 15의 약수의 모임

### 해설

‘키가 큰’, ‘농구를 잘하는’ 은 그 대상을 분명히 알 수 없으므로 집합이 아니다.

2. 집합  $B$  가  $\{1, 3, 7\}$  일 때, 다음 중 아래 벤 다이어그램을 만족하는 집합  $A$  가 될 수 있는 것은?



- ①  $\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$
- ②  $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 작은 자연수}\}$
- ③  $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{의 약수}\}$
- ④  $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 소수}\}$
- ⑤  $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 홀수}\}$

해설

- ①  $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$
- ②  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ③  $\{1, 7\}$
- ④  $\{2, 3, 5, 7\}$
- ⑤  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

3. 세 집합  $A, B, C$ 에 대하여 다음  안에 기호  $=, \neq$  중 알맞은 것을 순서대로 써넣어라.

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$$

$A$    $B$ ,  $A$    $C$  (단,  $=$ 는 ㉠,  $\neq$ 는 ㉡로 입력할 것)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉠

### 해설

집합  $B, C$ 를 원소나열법으로 나타내면  $B = \{1, 3, 5, 15\}$ ,  $C = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

따라서  $A \neq B$ ,  $A = C$ 이다.

4. 다음 그림은 민지네 반 시간표를 나타낸 것이다. 영어 수업이 있는 요일의 집합을  $A$ , 수학 수업이 있는 요일의 집합을  $B$ 라 할 때,  $A \cap B$ 를 구하여라.

월	화	수	목	금
국어	도덕	영어	영어	기가
수학	사회	과학	사회	일어
체육	수학	음악	체육	수학
영어	국어	도덕	과학	영어
과학	기가	창재	수학	국어
기가	체육	국어	미술	과학
		국사		

▶ 답:

▶ 정답: {월, 목, 금}

해설

$$A = \{\text{월}, \text{수}, \text{목}, \text{금}\}$$

$$B = \{\text{월}, \text{화}, \text{목}, \text{금}\}$$

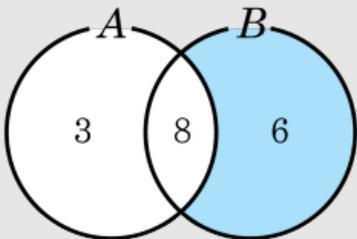
$$A \cap B = \{\text{월}, \text{목}, \text{금}\}$$

5. 희진이네 반 학생 중 피자를 좋아하는 학생은 11명, 떡을 좋아하는 학생은 14명, 피자과 떡을 모두 좋아하는 학생은 8명이다. 이때, 떡만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

- ① 6명      ② 8명      ③ 10명      ④ 12명      ⑤ 14명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



6. 9보다 작은 짝수의 집합을  $A$  라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ①  $1 \in A$       ②  $3 \notin A$       ③  $4 \in A$       ④  $5 \notin A$       ⑤  $6 \in A$

해설

집합  $A$  를 원소나열법으로 나타내면  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  이다. 따라서  $1 \notin A$

7. 세 집합  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{3, 4, 8, 9\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 5\}$  에 대하여  $(A \cap B) - C$  는?

①  $\{4\}$

②  $\{2, 4\}$

③  $\{4, 8\}$

④  $\{2, 8\}$

⑤  $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$  이다.

8. 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 할 때, 명제  $p \rightarrow q$  가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

①  $P \cap Q$

②  $P \cup Q$

③  $P^c \cup Q^c$

④  $P - Q$

⑤  $Q - P$

해설

$p \rightarrow q$  가 거짓임을 보이려면  $P$  의 원소 중에서  $Q$  의 원소가 아닌 것을 찾으려면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은  $P \cap Q^c = P - Q$

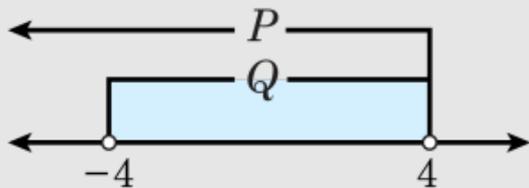
9.  $x < 4$ 는  $-4 < x < 4$  이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

$p : x < 4$ ,  $q : -4 < x < 4$  라고 하면



$\therefore Q \subset P$

10.  $a > b > 0$  일 때,  $a^2 > b^2$  이다. 임을 이용하여  $x > y > -1$  일 때,  $\sqrt{x+1}$ ,  $\sqrt{y+1}$  의 대소를 비교하면?

①  $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

②  $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③  $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤  $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

11. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

①  $a, b$ 의 산술 평균은  $\frac{a+b}{2}$ 이다.

②  $\sqrt{ab}$ 는  $a, b$ 의 기하평균이다.

③  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.

④  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시  $b = \frac{1}{a}$ 이다.

⑤  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots \text{절대부등식}$$

$$\frac{a+b}{2} : \text{산술평균}, \sqrt{ab} : \text{기하평균}$$

④: 절대부등식의 등호는  $a = b$ 일 때 성립한다.

12.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$ ,  $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

13. 실수  $x, y$ 에 대하여  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때,  $x + y$ 의 최댓값은?

①  $\sqrt{7}$

② 3

③  $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$  이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은  $\sqrt{13}$

14. 두 집합  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다.  $X$ 에서  $Y$ 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답:          개

▷ 정답: 24개

#### 해설

$a$ 에 대응하는 수가  $b$ 에 대응해서는 안 되고  
 $a, b$ 에 대응하는 수가  $c$ 에 대응해서는 안 되므로  
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

15. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 } 12 \text{의 약수}\}$  의 부분 집합 중에서 원소 1 또는 6 을 포함하는 부분집합의 개수는?

① 8개

② 12개

③ 16개

④ 20개

⑤ 24개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

원소 1 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-1} = 16 \text{ (개)}$$

원소 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-1} = 16 \text{ (개)}$$

원소 1, 6 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-2} = 8 \text{ (개)}$$

원소 1 또는 6 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$16 + 16 - 8 = 24 \text{ (개)}$$

16. 전체집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여  $(A - B) \cup (B \cap A^c) = \emptyset$  일 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $B^c = \emptyset$

②  $A^c \cap B^c = \emptyset$

③  $A \cap B^c = A$

④  $A - B = A$

⑤  $A = B$

해설

$(A - B) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$  이므로  $A - B = \emptyset$ ,  
 $B - A = \emptyset$  이다.

따라서  $A \subset B, B \subset A$  이므로  $A = B$  이다.

17. 집합  $A = \{1, 2, a, 5\}$ ,  $B = \{2, b + 1, b + 2, 6\}$  이고  $A \cap B = \{2, 4\}$  라고 할 때,  $(A - B) \cup (B - A)$  는?

①  $\{1, 3\}$

②  $\{1, 5\}$

③  $\{1, 3, 5\}$

④  $\{1, 3, 6\}$

⑤  $\{1, 3, 5, 6\}$

### 해설

$A \cap B = \{2, 4\}$  이므로  $a = 4$ ,  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  이다.

(1)  $b + 1 = 4$  일 경우,  $A \cap B = \{2, 4, 5\}$  가 되어 조건에 맞지 않는다.

(2)  $b + 2 = 4$  일 경우,  $A \cap B = \{2, 4\}$  가 되어 조건에 맞는다.

따라서  $A = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 6\}$  이 되어

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$  이다.

18. 자연수의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  $f(1) = 1$ 이고  $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$ 가 성립할 때,  $f(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 121

해설

$$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$$

$$f(1) = 1, f(2) = 3^2, f(3) = 5^2,$$

$$f(4) = 7^2, f(5) = 9^2, f(6) = 11^2 = 121$$

19. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 두 함수  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $g : X \rightarrow Y$ ,  $g(x) = ax + b$ 가  $f = g$ 일 때,  $ab$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

$f$ 와  $g$ 의 정의역이 같으므로

$f(-1) = g(-1)$ ,  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$ 이면  $f = g$ 가 된다

$$f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots \text{㉠}$$

$$f(0) = 1 = g(0) = b \cdots \text{㉡}$$

$$f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$a = 1, b = 1$$

따라서  $ab = 1$



21. 실수 전체의 집합의 부분집합  $A$  가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가)  $1 \in A$

(나)  $a \in A$  이면  $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합  $A$  는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수  $n$  에 대하여  $2^n \in A$  이다.

㉢ 집합  $A$  의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서  $1 \in A$  이므로 조건 (나)에 의하여

$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots,$

즉,  $(\sqrt{2})^n$  ( $n$  은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합  $A$  의 원소이므로  $A$  는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서  $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots,$

즉  $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$  이므로 임의의 자연수  $n$  에 대하여  $2^n \in A$  이다.

㉢ (반례)

집합  $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$  은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

22. 두 집합  $A = \{x|x \text{는 } 7\text{미만의 자연수}\}$ ,  $B = \{2, 3, 7, 8\}$ 에 대하여  $(B - A) \cup X = X$ ,  $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합  $X$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답:            개

▷ 정답: 64개

### 해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 3, 7, 8\}$$

$$(B - A) \cup X = X \text{이므로 } (B - A) \subset X,$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{이므로 } X \subset (A \cup B),$$

$$\{7, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

따라서, 집합  $X$ 는  $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로

$$2^{8-2} = 2^6 = 64(\text{개}) \text{이다.}$$

23. 전체집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여  $n(U) = 40$ ,  $n(A \cap B) = 5$ ,  $n(A^c \cap B^c) = 3$  일 때,  $n(A - B) + n(B - A)$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 32

해설

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 3 = 37$$

$$\begin{aligned} n(A - B) + n(B - A) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 37 - 5 = 32 \end{aligned}$$

24.  $x > 2$  일 때,  $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$  의 최솟값을  $a$ , 그 때의  $x$ 의 값을  $b$ 라 할 때,  $a + 2b$ 의 값을 구하면?

①  $5 + \sqrt{2}$

②  $5 + 2\sqrt{2}$

③  $5 + 3\sqrt{2}$

④  $5 + 4\sqrt{2}$

⑤  $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

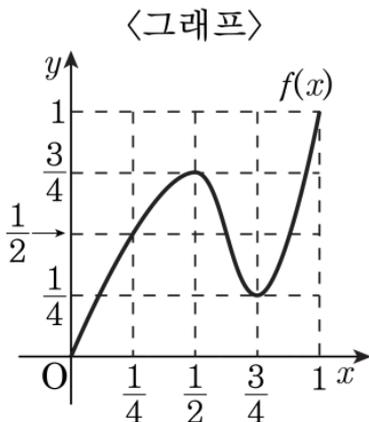
$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

25.  $R = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 이라 할 때,  $R$ 에서  $R$ 로의 함수  $y = f(x)$  의 그래프가 다음 그림과 같다. (단,  $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : f$  개수  $n$ 개)



이 때,  $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$  의 값을 구하면?

(단,  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$ )

- ①  $\frac{99}{2}$       ②  $\frac{95}{2}$       ③  $\frac{93}{2}$       ④  $\frac{91}{2}$       ⑤  $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$ , ... 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$