

1. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP}$ 의 최댓값은? (단, O 는 원점)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

이 원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$

다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면

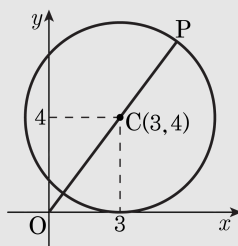
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나

는

두 점 중 한 점을 P 라 할 때,

$\overline{OP}$ 가 최대이다.

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} + 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$$



2. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

3. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 = 4$

③ $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

⑤ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0)이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (-1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

4. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 4a - 5 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y+a)^2 &= 2a^2 + 4a + 5 \\ &= 2(a+1)^2 + 3\end{aligned}$$

따라서 $a = -1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a, -a) = (-1, 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

5. 두 점 A(-5, 0), B(0, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 3 인 점 P의 자취는 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로

$$4(x^2 + y^2) = 9\{(x + 5)^2 + y^2\}$$

$$5x^2 + 5y^2 + 90x + 225 = 0$$

$$\therefore (x + 9)^2 + y^2 = 36$$

따라서 반지름의 길이는 6이다.

6. A(-2, 1) 과 점 B(2, -1)을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 이므로 교점 P는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P의 자취의 길이는 $\overline{AB} \times \pi$ 이다.
 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$ 이다.

7. 두 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 \leftarrow \text{중심 } (3, 4)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \leftarrow \text{중심 } (0, 0)$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이다.

이 때, $|r-3| = 5$ 이어야 하므로 $r-3 = \pm 5$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

8. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

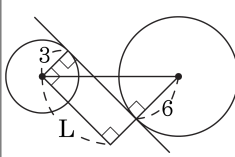
$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 36$, $(x - 12)^2 + y^2 = 9$ 의 공통내접선의 길이는?

- ① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

두 원의 중심 사이의 거리는 12
 내접선의 길이를 L 이라 하면,
 $L^2 = 12^2 - 9^2$
 $\therefore L = 3\sqrt{7}$



10. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

11. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 과 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위를 구하면?

① $k = \sqrt{5}$

② $k = -\sqrt{5}$

③ $k = 2\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

⑤ $k > \sqrt{5}, k < \sqrt{5}$

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름보다 작아야 한다.

⇒ 직선과 중심 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} < 1$$

⇒ $|k| < \sqrt{5}$

⇒ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

12. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$ 밖의 점 (a, a) 로부터 이 원에 그은 접선의 길이가 $\sqrt{14}$ 가 되도록 a 의 값을정하면?

① -1

② 1

③ -2 또는 -4

④ 2 또는 4

⑤ 1 또는 2

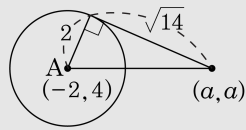
해설

$$\text{준식} = x^2 + 4x + y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$\rightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 4 \cdots \text{㉠}$$

점 (a, a) 로부터

㉠에 그은 접선의 길이를 l 이라 하면



$$l^2 = 14 = (a+2)^2 + (a-4)^2 - 4$$

$$\rightarrow a^2 + 4a + 4 + a^2 - 8a + 16 - 4 - 14 = 0$$

$$\rightarrow 2a^2 - 4a + 2 = 0 \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\rightarrow (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

13. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

14. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$

양변을 제곱하면

$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$

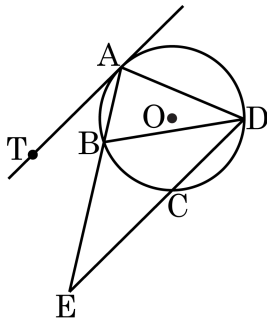
따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y = -2x + 5$

따라서 y 절편은 5이다.

15. 네 개의 점 A, B, C, D가 한 원 O 위에 있고, 직선 AT는 원 O의 접선이며, $\overline{CD} \parallel \overline{TA}$ 이다. 또, 점 E는 직선 CD와 AB가 만나는 점일 때, $\overline{AD}$ 의 길이는? (단, $\overline{AB} = 3, \overline{BE} = 6$)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

현 AB에 대하여 $\angle BAT = \angle BDA$
 또한, $\overline{ED} \parallel \overline{TA}$ 이므로
 $\angle DEA = \angle EAT$ 이다.
 $\therefore \angle DEA = \angle BDA$ ($\because$ 접선과 현이 이루는 각과 원주각은 같다.)
 따라서 $\triangle EAD \sim \triangle DAB$ (AA 닮음)이므로
 $\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$, $9 : x = x : 3$
 $\therefore x^2 = 27$ $\therefore x = 3\sqrt{3}$ ($\because x > 0$)

16. 두 점 A(-1, 3), B(2, a)를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a)를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$

$\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \dots\dots\textcircled{\tiny{A}}$

직선 $\textcircled{\tiny{A}}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{\tiny{A}}$ 에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$

$\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \dots\dots\textcircled{\tiny{B}}$

$\textcircled{\tiny{B}}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$

$\therefore a = -1$

17. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2$, $y = -1$

② $x = 1$, $y = 1$

③ $x = -1$, $y = 1$

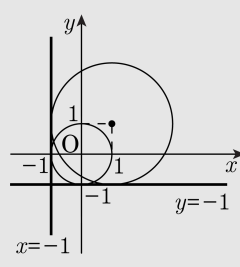
④ $x = 1$, $y = -1$

⑤ $x = -1$, $y = -1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x = -1$, $y = -1$



18. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 3\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$

$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

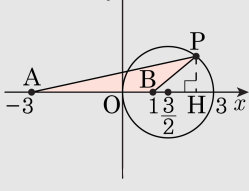
$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$

이 때, $\overline{AB} = 4$ 이고 $\overline{PH}$

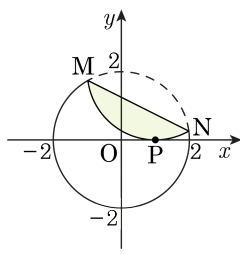
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$



19. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 현 MN 에서 접었을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$
 호 MN 을 포함하는 원은 x 축에 접하므로
 $x = 1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \cdots \textcircled{2}$
 직선 MN 은 두 원 ①, ②의
 공통현의 방정식이므로 ① - ②을 하면,
 $x^2 + y^2 - 4 - \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4\} = 0$
 $\therefore 2x + 4y = 5$
 $\therefore a = 2, b = 4, c = -5$
 $\therefore a + b + c = 1$

20. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$